Лема

A_6 је проста група.

доказ:

Нека је $H \neq \{1\}$ нормална подгрупа у A_6.
Показујемо да је $H = A_6$.

случај 1

Претпоставимо да постоји неко $\alpha \in H$, $\alpha \neq 1$ тако да α фиксира неко $i_0 \in \{1,2,3,4,5,6\}$.
Дакле, $\alpha(i_0) = i_0$.

Дефинишимо

$$F = \{\sigma \in A_6 \mid \sigma(i_0) = i_0\}$$

Очигледно, $F \leq A_6$.
С обзиром на то да F чини само парне пермутације, а фиксира једну тачку (дакле не дјелује на њој), лако се закључује да је F заправо A_5, односно $F \cong A_5$.

С друге стране, $\alpha \in H \cap F$.
Такође, из претпоставке да $H \trianglelefteq A_6$, слиједи

$\{1\} \neq H \cap F \trianglelefteq F$.

С обзиром на то да је F, односно A_5, проста група, онда $H \cap F = F$. То значи да је

$F \leq H$.

Извјесно је да F по дефиницији садржи бар један 3-циклус.

<u>Тврђење:</u> Сви 3-циклуси у A_n су конјуговани. $(n \geq 5)$

Нека је σ произвољан 3-циклус.

С обзиром на то да су у S_n све пермутације исте цикличне структуре конјуговане, онда постоји $\pi \in S_n$ тако да

$$\pi \sigma \pi^{-1} = (123)$$

Ако је $\pi \in A_n$, онда је показано да постоји тражена пермутација која конјугацијом слика σ у (123).

Ако $\pi \notin A_n$, посматрајмо $\pi' = (45)\pi$, па је $\pi' \in A_n$ и $\pi' \sigma (\pi')^{-1}$

$$= (45) \underline{\pi \sigma \pi^{-1}} (45) = (45)(123)(45) = (123)$$

Пошто је $F \leq H$, онда и H мора садржати бар један 3-циклус. Како је $H \trianglelefteq A_6$, а сви 3-циклуси конјуговани у A_n $(n \geq 5)$, онда су сви 3-циклуси из A_6 заправо у H.

На основу тврђења да 3-циклуси генеришу

A_n, закључујемо да је $H = A_6$.

Случај 2

Претпоставимо да не постоји $\alpha \in H$, тако да $\alpha \neq 1$ и α фиксира неко $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Из тога следи да је свако $\alpha \in H$ облика $(12)(3456)$ или $(123)(456)$.

У случају $\alpha = (12)(3456) \in H$, следи $\alpha^2 \in H$, а α^2 фиксира 1, а што одговара случају 1.

У другом случају, $\alpha = (123)(456) \in H$, посматрајмо

$$\alpha(\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}), \text{ где је } \beta = (234).$$

Закључујемо

$$\underbrace{\alpha}_{\in H}(\underbrace{\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}}_{\in H}) \in H,$$

док исти елемент фиксира 1.

На основу случаја 1 и случаја 2, закључујемо да је A_6 проста група.

Теорема

A_n је проста група за $n \geq 5$.

доказ:

Нека је $H \neq \{1\}$ и $H \trianglelefteq A_n$. Већ смо доказали

— A_n је генерисана 3-циклусима
— сви 3-циклуси су конјуговани у A_n.

Јасно је да за доказ теореме треба да покажемо да H садржи бар један 3-циклус.

Нека је $\beta \in H$, $\beta \neq 1$. Онда постоје i, j такви да $i \neq j$ и $\beta(i) = j$.

Нека је α 3-циклус који фиксира i, а „помјера" j.

Како је $\beta\alpha(i) = \beta(i) = j$, а $\alpha\beta(i) = \alpha(j) \neq j$, онда закључујемо да α и β не комутирају.

То значи да је $\gamma = (\alpha\beta\alpha^{-1})\beta^{-1} \neq 1$, и $\gamma \in H$.

С друге стране $\gamma = \alpha(\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})$, па је γ производ два 3-циклуса.

Закључујемо да γ „помјера" највише 6 симбола.

Нека γ помјера симболе из скупа M, а $|M| \leq 6$.

Нека је $M \subseteq \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$

Дефинишимо

$F = \{\sigma \in A_n \mid \sigma$ фиксира све $i \notin \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}\}$

Видимо да F „дјелује" само на 6 симбола, F садржи све парне пермутације које дјелују на $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$ и очигледно, F је група.

Закључујемо $F \cong A_6$.

С обзиром на то да γ „помјера" само елементе из скупа $M \subseteq \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$, онда $\gamma \in F$, односно $\gamma \in H \cap F$.

Значи, $H \cap F \neq \{1\}$.

Како је $H \trianglelefteq A_n$, онда $H \cap F \trianglelefteq F$, а пошто је $F \cong A_6$, A_6 проста, онда $H \cap F = F \Rightarrow F \leq H$.

Пошто у F (A_6) постоје 3-циклуси, онда у H постоје 3-циклуси, чиме је све доказано.

Γ - 3-циклуси генеришу A_n
- сви 3-циклуси могу бити у H ако је бар један у H, јер је $H \trianglelefteq A_n$. $\lrcorner$

<u>Теорема (Бернсајд)</u>

Нека је G коначна група која дјелује на скупу

X. Ако је N број орбита, онда је

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

где је $Fix(g) = \{ x \in X \mid x^g = x \}$

<u>доказ</u>:

Нека је $G = \{ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \}$

	орбита 1			...	орбита N
	x_1	x_2	...	...	
τ_1	f_{11}	f_{12}			
τ_2	f_{21}	f_{22}			
$\vdots$					
τ_n	f_{n1}	f_{n2}			

$$f_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако } \tau_i \text{ фиксира } x_j \\ 0, & \text{ако } \tau_i \text{ не фиксира } x_j \end{cases}$$

$\sum_{\tau \in G} |Fix(\tau)| \equiv$ број свих 1-ица у табели.

Нека је ... $G_{x_i} = \{ \tau \in G \mid x_i^{\tau} = x_i \}$

Подсећање: $\mathcal{O}x_i = \{ \dots$

$$|\mathcal{O}(x_i)| = |G| / |G_{x_i}|$$

Ако посматамо x_1, x_2 који припадају истој орбити,

$$|\mathcal{O}(x_1)| = |\mathcal{O}(x_2)| \Rightarrow |G_{x_1}| = |G_{x_2}|.$$

$|G_{x_2}|$ представља број 1-ица у првој колони.

Дакле, број 1-ица у свакој колони која одговара првој орбити је исти.

$|\mathcal{O}(x_1)| \cdot |G_{x_1}| \equiv$ број јединица у матрици која одговара првој орбити.

Међутим

$$|\mathcal{O}(x_1)| \cdot |G_{x_1}| = \frac{|G|}{|G_{x_1}|} \cdot |G_{x_1}|$$

$$= |G|.$$

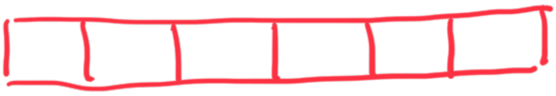
Дакле, број 1-ица у дијелу матрице који одговара првој орбити је $|G|$.

Аналогно, закључујемо и за остале орбите.

Дакле, $\sum_{\tau \in G} |Fix(\tau)| = N \cdot |G|$.

Примјер

Колико има различитих „застава" које су обојене са 3 боје, али у 6 колона



боје $\in \{1,2,3\}$

Подразумијевамо да је

123312 и 213321 исте застава.

Нека је $X = \{ (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) \mid c_i \in \{1,2,3\} \}$

Нека је $G = \{1, \tau\} = \langle \tau \rangle$,

при чему $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$|G| = 2$.

Орбите дејства групе G на скуп X су заправо „заставе".

По Бернсајдовој леми, тај број је

$$N = \frac{1}{2} \left[|Fix(1)| + |Fix(\tau)| \right]$$

$|Fix(1)| = 3^6$

$|Fix(\tau)| = 3^3$

$|Fix(\tau)| = 3^3$, јер τ фиксира

елементе облика (x, y, z, z, y, x).

Дакле

$$N = \frac{1}{2}\left[3^6 + 3^3\right] = 378.$$

<u>Примјер</u>

Дата је табела 4×4

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Свако поље је црвено или жуто.

Колико имамо различитих бојења?

[Квадрат има исто бојење, уколико се неком ротацијом један може „поклопити" са другим.]

<u>Одговор</u>: $N = 16456.$