- $\boxed{\text{Групе}}$

$(G, \cdot)$

и својства

- ред групе
- ред елемента у групи

$a^n = e$ n - најмањи природан број са датим својством

- примјери група?

$(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$

Група пермутација?

<u>примјер</u>

$S = \{1, 2, 3\}$

Скуп свих бијективних пресликавања из S у S

$$S_3 = \{ f : S \to S \mid f \text{ бијекција} \}$$

Посматрајмо операцију композиције $(\circ)$

<u>начин представљања пермутација</u>

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12) \quad \text{(транспозиција)}$$

– свака пермутација се представља као производ независних (дисјунктних) циклуса

– ред циклуса?

$$\alpha = (a_1 a_2 \dots a_k)$$

$$ord(\alpha) = k$$

– $\alpha = \beta_1 \circ \beta_2 \circ \dots \circ \beta_t$

β_i, $i = 1, \dots, t$ независни циклуси

$ord(\alpha) = ?$

НЗС$(\ell(\beta_1), \ell(\beta_2), \dots, \ell(\beta_t))$

где је $\ell(\beta_i)$ – дужина циклуса β_i.

<u>Лема</u> Ако је G коначна група, онда сваки елемент $x \in G$ има коначан ред.

$x, x^2, x^3, \dots$

$\exists k, l \in \mathbb{N}$ тако да $x^k = x^l$

$k > l$.

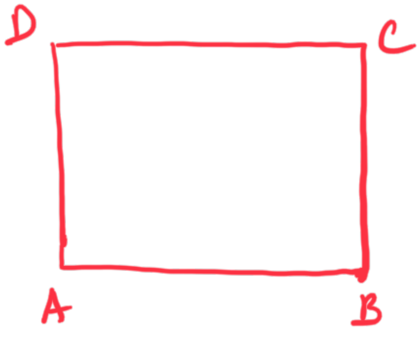
Даље, $x^{k-l} = e$.

...

Дефиниција

Кретање је бијекција $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ која чува растојање. (изометрија)

пример



Посматрамо скуп свих изометрија које квадрат ABCD пресликавају у себе.

Id – идентичко пресликавање

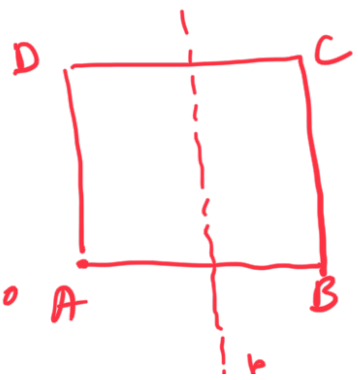
α – ротација за 90° ↻

$$\alpha = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix} = (A\,D\,C\,B)$$

α^2 – ротација за 180° $= \alpha \circ \alpha$

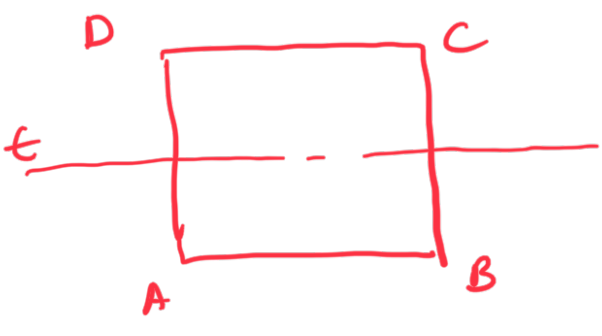
$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} = (A\,C)(B\,D)$$

$\alpha^3 \ldots$



Γ α - ротација за 90

З_b



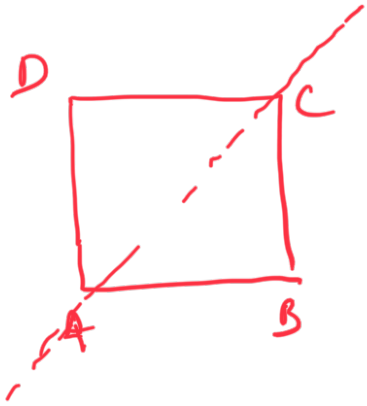
$\alpha \circ s_p \circ \alpha$

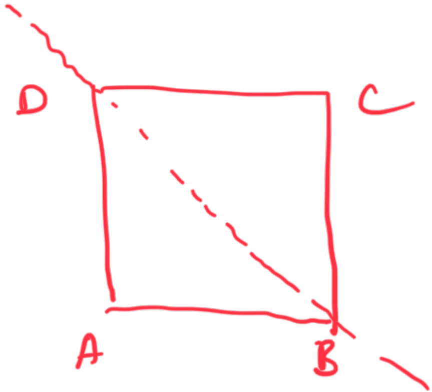
$= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$

$= s_p$

$\alpha \circ s_p = s_p \circ \alpha^{-1}$

$s_p = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$ $\quad s_e = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$

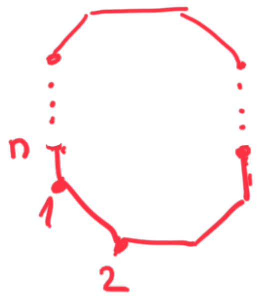




Диједарска група D_4

$|D_4| = 8$

<u>питање</u> Описати диједарску групу правилног n-тоугла.



$|D_n| = 2n.$

α – ротација за $\frac{2\pi}{n}$ степени

s – симетрија

$\alpha \circ s \circ \alpha = s$

$\mathrm{ord}(\alpha) = n$

$\mathrm{ord}(s) = 2$

Лема

(1) Ако је $G = \langle a \rangle$ циклична група реда n, онда је a^k генератор G ако и само ако НЗД$(k, n) = 1$.

(2) Ако је G циклична група реда n и $\mathrm{gen}(G) \equiv$ скуп свих генератора групе G, онда је $|\mathrm{gen}(G)| = \varphi(n)$, гдје је φ - Ојлерова функција.

Лема Нека је G коначна група и $a \in G$. Онда је ред елемента a једнак реду цикличне подгрупе генерисане елементом a, односно $\mathrm{ord}(a) = |\langle a \rangle|$.

Лема

Пресјек $\bigcap H_i$ фамилије подгрупа групе G је такође подгрупа у G.

Питање:

Нека је X подскуп групе G

Како изгледа најмања група која садржи скуп X?

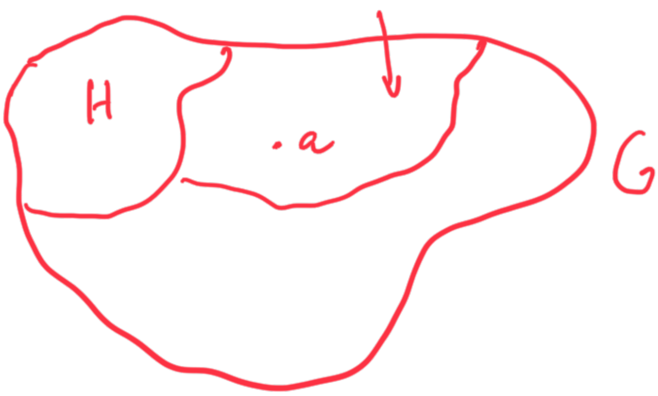
[illegible] $\langle X \rangle$ [illegible]

Означимо је са $\langle X \rangle$, и кажемо да је то група која је генерисана скупом X.

На пример, ако је $X = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ онда $\langle X \rangle = \{ b_{i_1}^{\varepsilon_1} b_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots b_{i_k}^{\varepsilon_k} \mid$ при чему $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$, $i_j \in \{1, 2, \dots, k\}\}$

- Лагранжова теорема

Нека је H подгрупа групе G.
Онда $aH = \{ah \mid h \in H\}$, $a \in G$ и кажемо да је aH лијеви косет подгрупе H у односу на елемент a.
Аналогно, Ha је десни косет.



$aH \cap H = \emptyset$

$|aH| = |H|$

Последица

Ако је G коначна група и $a \in G$, онда

$\operatorname{ord}(a) \mid |G|$.

Последица

Ако је p прост број, онда је свака група реда p циклична.

Лема

Нека је $\mathbb{Z}_m$ скуп остатака по модулу m.
Онда је $\mathbb{I}_m = \{[r] \in \mathbb{Z}_m \mid НЗД(r,m)=1\}$ мултипликативна група у односу на множење по модулу m, реда $\varphi(m)$, где је φ - Ојлерова функција.

Пример

$\mathbb{I}_6 = \{1, 5\}$

$\mathbb{I}_8 = \{1, 3, 5, 7\}$

....

■ **EXAMPLE 9**[†] The *determinant* of the 2×2 matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ is the number $ad - bc$. If A is a 2×2 matrix, det A denotes the determinant of A. The set

$$GL(2, \mathbf{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

of 2×2 matrices with real entries and nonzero determinant is a non-Abelian group under the operation

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix}.$$

The first step in verifying that this set is a group is to show that the product of two matrices with nonzero determinant also has nonzero determinant. This follows from the fact that for any pair of 2×2 matrices A and B, det $(AB) =$ (det A)(det B).

Associativity can be verified by direct (but cumbersome) calculations. The identity is $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; the inverse of $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ is

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\ \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

(explaining the requirement that $ad - bc \neq 0$). This very important non-Abelian group is called the *general linear group* of 2×2 matrices over $\mathbf{R}$. ■