MATEMATIKA 1
skripta za studente fizike

Nebojša Č. Dinčić,
Departman za Matematiku,
Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Nišu,
Srbija
e-mail: `ndincic@hotmail.com`

Novembar 2013.-Februar 2014.

Sadržaj

Glava 1

Uvodni pojmovi

1.1 Iskazni račun

Definicija 1.1.1. Iskaz *je proizvoljna izjavna smislena rečenica koja mora biti ili istinita (tačna) ili neistinita (netačna). Pritom se pretpostavlja da postoji mogućnost utvrđivanja istinitosti iskaza.*

Iskazi se obično obeležavaju malim latiničnim slovima p, q, r, s... Istinitosnu vrednost iskaza p označavaćemo sa $\tau(p)$ (čita se: ”tau od pe”), i ona se definiše na sledeći način:

$$\tau(p) = \begin{cases} \top, & \text{iskaz } p \text{ je istinit,} \\ \bot, & \text{iskaz } p \text{ nije istinit,} \end{cases}$$

Simboli $\top$ i $\bot$ (”te” i ”ne-te”) nazivaju se iskaznim konstantama.

Primer 1.1.1. Posmatrajmo naredne rečenice:

1. ”Broj 16 je paran.”

2. ”Elektron je elementarna čestica.”

3. ”2+2=3.”

4. ”Danas je lepo vreme.”

5. ”Koliko je sati?”

6. ”Ova rečenica nije istinita.”

7. ”Svaki paran broj veći od 2 može se napisati kao zbir dva prosta broja.”

Prve tri rečenice predstavljaju iskaze, i njihove istinitosne vrednosti su redom $\top$, $\top$ i $\perp$. Četvrta rečenica nije iskaz zato što je subjektivna te njenu istinitosnu vrednost ne možemo utvrditi, dok peta nije izjavna rečenica, te ne može biti ni iskaz. Šesta rečenica ne može biti iskaz, zato što nije ni istinita ni neistinita: ako bi bila istinita, onda bi značilo da nije istinita, a ako bi bila neistinita onda bi to značilo da ona nije neistinita, tj. da je istinita. Konačno, sedma rečenica nije iskaz zato što nije poznato da li je ona tačna. Naime, ona predstavlja *hipotezu Goldbaha*[1], težak problem iz teorije brojeva koji je postavljen 1742. i još uvek nije rešen.

1.1.1 Logičke operacije

Od jednostavnijih iskaza korišćenjem izvesnog broja iskaznih operacija mogu se praviti složeniji iskazi. Na primer, iskaz "AKO 3 deli 12 ILI 2 deli 12, ONDA 6 deli 12" je sastavljen od tri jednostavna iskaza: "3 deli 12", "2 deli 12" i "6 deli 12", koji su povezani tzv. logičkim veznicima AKO-ONDA i ILI.

Definicija 1.1.2. Negacija *iskaza p je iskaz koji je istinit kada je iskaz p neistinit, a neistinit kada je iskaz p istinit. Negacija iskaza p označava se sa $\neg p$ i čita "ne p" ili "nije p".*

Negacija je unarna operacija, pošto ima samo jedan argument. Njena istinitosna tablica izgleda ovako:

$\tau(p)$	$\tau(\neg p)$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

Na primer, ako je iskaz p rečenica "broj 10 je prost", onda iskazu $\neg p$ odgovara rečenica "broj 10 nije prost". Primetimo da zaista $\tau(p) = \perp$, $\tau(\neg p) = \top$.

Definicija 1.1.3. Konjunkcija *iskaza p i q je iskaz koji je istinit samo kada su oba iskaza p i q istiniti, i koji nije istinit kadgod je bar jedan od iskaza p ili q neistinit. Konjunkcija iskaza p i q označava se sa $p \wedge q$ i čita "p i q".*

Istinitosna tablica konjunkcije izgleda ovako:

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \wedge q)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

[1] Christian Goldbach (1690-1764), nemački matematičar

Definicija 1.1.4. Disjunkcija *iskaza p i q je iskaz koji je neistinit samo kada su oba iskaza p i q neistiniti, i koji je istinit kadgod je bar jedan od iskaza p ili q istinit. Disjunkcija iskaza p i q označava se sa $p \vee q$ i čita "p ili q".*

Istinitosna tablica disjunkcije izgleda ovako:

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \vee q)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Na primer, ako su dati iskazi p: "Broj 2 deli broj 6" i q: "Broj 5 deli broj 6", iskaz $p \wedge q$ je "Brojevi 2 i 5 dele broj 6", a iskaz $p \vee q$ je "Broj 2 ili broj 5 dele broj 6". Jasno je da $\tau(p \wedge q) = \bot$, a $\tau(p \vee q) = \top$.

Pored ovako definisane disjunkcije, uvodi se i takozvana **isključiva disjunkcija** iskaza p i q kao iskaz, označen sa $p \veebar q$ (čita se "ili p ili q"), koji je istinit samo kada je tačno jedan od iskaza p i q istinit.

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \veebar q)$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Kao ilustracija razlike između obične i isključive disjunkcije može da posluži sledeći vic:

- Kako prepoznati matematičara u salonu automobila?

- Kad kaže: "Uzeću ovaj crveni ili onaj plavi auto", brzo doda - "ali ne oba!"

Definicija 1.1.5. Implikacija *iskaza p i q je iskaz koji je neistinit samo kada je iskaz p istinit a iskaz q neistinit. Implikacija iskaza p i q označava se sa $p \Rightarrow q$ i čita se kao: "ako p, onda q", "iz p sledi q", "p je potreban uslov za q" ili "q je dovoljan uslov za p". Iskaz p se obično naziva pretpostavka (premisa), a iskaz q posledica (konsekvenca).*

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \Rightarrow q)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Pomenimo da, za razliku od realnog sveta, u matematici $p \Rightarrow q$ može biti istinito i onda kad iskaz p nije istinit; na primer p: "broj 2 deli broj 5", q: "broj 2 deli broj 10"; iskaz p nije istinit, iskaz q jeste.

Definicija 1.1.6. Ekvivalencija *iskaza p i q je iskaz koji je istinit kadgod oba iskaza p i q imaju iste istinistosne vrednosti. Ekvivalencija iskaza p i q označava se sa $p \Leftrightarrow q$ i čita se kao: "p ekvivalentno q", "p ako i samo ako q", "ako p, onda q, i ako q, onda p" ili "p je potreban i dovoljan uslov za q".*

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \Leftrightarrow q)$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Primer ekvivalencije je kadgod neki objekat opisujemo na dva različita načina. Recimo: "Broj 6 je paran ako i samo ako je deljiv sa dva" je ekvivalencija iskaza p: "Broj 6 je paran" i q: "Broj 6 je deljiv sa dva."

1.1.2 Iskazne formule

Kombinovanjem jednostavnih iskaza na određeni način, mogu se graditi složeniji iskazi. Koristićemo u nastavku termin "iskazno slovo" za jednostavne iskaze.

Definicija 1.1.7. Iskazne formule *definišemo na sledeći način:*

1. *Iskazna slova i iskazne konstante su iskazne formule.*
2. *Ako su A i B iskazne formule, onda su i $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B$ iskazne formule.*
3. *Iskazne formule su samo oni iskazi koji se mogu dobiti isključivo primenom pravila 1. i 2. ove definicije konačno mnogo puta.*

Primer 1.1.2. Neka su p, q, r jednostavni iskazi. Izraz $\neg p \wedge (q \vee (\bot \Rightarrow r))$ je iskazna formula jer je sastavljen u skladu sa definicijom.

Prioritet logičkih operacija (od najvećeg ka najmanjem):

1. $\neg$
2. $\wedge, \vee$
3. $\Rightarrow, \Leftrightarrow$

Kao i kod aritmetičkih izraza, redosled operacija može se promeniti koristeći zagrade.

Primer 1.1.3. Odrediti istinitosne vrednosti sledećih iskaznih formula: $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, $\neg p \vee q$, $\neg q \vee p$ i $p \Leftrightarrow q$.

Formiramo istinitosnu tablicu na sledeći način:
1. Za sve elementarne iskaze (”slova”) treba obezbediti onoliko vrsta u tablici koliko je potrebno da pokrijemo sve moguće kombinacije $\top - \bot$. Za dva slova, p i q, biće potrebno 4 kombinacije, za 3 slova 8, za n slova ukupno 2^n kombinacija. Iskazna slova unosimo u prvim kolonama tablice.
2. U preostalim kolonama tablice upisujemo jednostavnije iskazne formule od kojih je sastavljena formula koju dokazujemo (u našem slučaju to su $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow p$) i njihove istinitosne vrednosti za odgovarajuće vrednosti iskaza p i q. Ukoliko je potrebno odrediti istinitosne tablice za više iskaza koji zavise od istih iskaznih slova (kao što je slučaj u ovom primeru), sve radimo preko jedne tablice. Zbog uštede u prostoru, u tablici nećemo pisati $\tau(x)$ već samo x za iskaz x.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow q)$	$\neg p \vee q$	$\neg q \vee p$	$p \Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Primećujemo da se poklapaju vrednosti u trećoj i šestoj koloni, četvrtoj i sedmoj, odnosno petoj i osmoj.

Definicija 1.1.8. *Dve formule A i B, sastavljene od istih iskaznih promenljivih su* **identički jednake** *ako se njihove tablice vrednosti istinitosti poklapaju.*

Dakle, iz prethodnog primera vidimo da:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q), \quad (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

Ovo u stvari znači da operacije $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ mogu da se izraze preko $\wedge, \vee, \neg$.

1.1.3 Osobine iskaznih operacija

1. komutativnost: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p, \quad p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$;
2. asocijativnost: $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r), \quad (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$;
3. distributivnost ili/i odnosno i/ili: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

4. De Morganovi zakoni: $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q, \quad \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$;

5. idempotentnost: $p \wedge p \Leftrightarrow p, \quad p \vee p \Leftrightarrow p$;

6. $p \wedge \top \Leftrightarrow p, \quad p \vee \bot \Leftrightarrow p$;

7. zakon dvojne negacije: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$;

8. zakon apsorpcije: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p, \quad p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$.

Koristeći navedene osobine iskaznih operacija, može se pokazivati da su određeni iskazi međusobno ekvivalentni.

Videli smo da se iskazna formula koja sadrži iskazne operacije $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ može svesti na formulu koja sadrži samo $\neg, \wedge, \vee$. Primenom De Morganovih zakona, možemo dalje svesti svaku iskaznu formulu tako da sadrži samo $\neg, \wedge$ ili $\neg, \vee$. Postavlja se pitanje: da li postoji logička operacija preko koje je moguće izraziti sve ostale logičke operacije.

Primer 1.1.4. Iskazne operacije $\wedge, \vee, \neg$ mogu se izraziti pomoću samo jedne iskazne operacije. Šefer[2] je 1913. dokazao da se za osnovnu operaciju može uzeti tzv. NAND operacija koja se obično definiše kao $p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$. Zaista,

$$\neg p \Leftrightarrow p \uparrow p, \; p \wedge q \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q), \; p \vee q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q).$$

Tridesetak godina ranije, Pers[3] je dokazao (ali nije objavio svoje rezultate) da je isto moguće uraditi sa tzv. NOR operacijom koja se može definisati kao $p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$. Zaista,

$$\neg p \Leftrightarrow p \downarrow p, \; p \wedge q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q), \; p \vee q \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q).$$

Primer 1.1.5. Hajde da vidimo sa čim je ekvivalentna iskazna formula $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ koja je poznata i kao zakon odvajanja.

---

[2]Henry Maurice Sheffer (1882–1964), američki logičar

[3]Charles Sanders Peirce (1839–1914), američki filozof, logičar i matematičar, poznat i kao "otac pragmatizma"

$$\begin{aligned}
p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q &\Leftrightarrow (p \wedge (\neg p \vee q)) \Rightarrow q \quad (\text{zbog } (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q))\\
&\Leftrightarrow \neg(p \wedge (\neg p \vee q)) \vee q\\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg(\neg p \vee q)) \vee q \quad (\text{De Morganov zakon})\\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \vee q \quad (\text{De Morganov zakon})\\
&\Leftrightarrow ((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee q \quad (\text{distributivnost})\\
&\Leftrightarrow (\top \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee q\\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee q\\
&\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee q) \quad (\text{asocijativnost})\\
&\Leftrightarrow \neg p \vee \top\\
&\Leftrightarrow \top.
\end{aligned}$$

Definicija 1.1.9. *Iskazna formula koja je istinita za sve vrednosti istinitosti iskaza od kojih je sastavljena naziva se* **tautologija** *ili* **identički istinita formula**. *Iskazna formula koja nije istinita ni za jednu vrednost istinitosti iskaza od kojih je sastavljena naziva se* **kontradikcija**.

Neke važnije tautologije su:

1. zakon identiteta $p \Rightarrow p$;

2. zakon protivrečnosti $\neg(p \wedge \neg p)$;

3. zakon isključenja trećeg: $p \vee \neg p$;

4. zakon dvostruke negacije: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$;

5. zakon silogizma (tranzitivnost): $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$, $(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$;

6. zakon kontrapozicije: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$;

7. pravilo izvođenja (modus ponens): $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$;

8. zakon protivrečnosti: $((\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$.

Primer za zakon kontrapozicije: neka je p iskaz "proizvod dva cela broja je neparan broj", a q "oba činioca su neparni brojevi". Ako bar jedan od činilaca nije neparan broj (tj. bar jedan je paran), onda proizvod nije paran.

Primer 1.1.6. Dokazati da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

Pretpostavimo suprotno, da je $\sqrt{2}$ racionalan broj. To znači da $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ za neka dva uzajamno prosta cela broja (naravno, $q \neq 0$). Kvadriranjem dobijamo: $2 = \frac{p^2}{q^2}$, odnosno $p^2 = 2q^2$, odakle sledi da $2|p^2$; ako 2 deli p^2 tada 2 deli p, pa je p paran broj, te zato postoji neki ceo broj m takav da $p = 2m$. Zamenom u $p^2 = 2q^2$ dobijamo $(2m)^2 = 2q^2$, odnosno $q^2 = 2m^2$, odakle kao malopre zaključujemo da je i q paran broj. Dakle, celi brojevi p i q su parni, što znači da oni nisu uzajamno prosti (podsećamo: dva cela broja su uzajamno prosti ako ne postoji ceo broj različit od 1 koji deli oba), čime smo dobili kontradikciju sa pretpostavkom da su p i q uzajamno prosti. Dakle, naša polazna pretpostavka da je $\sqrt{2}$ racionalan broj nije tačna, odnosno $\sqrt{2}$ je iracionalan broj.

Pogledajmo sada logičku strukturu dokaza. Ako sa s označimo iskaz "$\sqrt{2}$ nije racionalan broj", a sa t iskaz "celi brojevi p i q nisu uzajamno prosti", tada se primenom zakona protivrečnosti $((\neg s \Rightarrow t) \wedge \neg t) \Rightarrow s$ dobija traženi dokaz.

1.1.4 Predikati i kvantifikatori

Iskazni račun je vrlo ograničen. Na primer, za realne brojeve x i y iskazi "x je paran broj" i "x je manje od y" mogu biti kako istiniti tako i neistiniti (u zavisnosti od izbora x i y), znači - neodređeni su. Tada elementarne iskaze možemo posmatrati kao promenljive koje uzimaju vrednosti $\top$ ili $\bot$. Na taj način srećemo se sa izrazima koji se odnose na izvesne objekte.

Neka je dat neki skup objekata $x, y, z, ...$, i neka su iskazi koji se odnose na njih označeni recimo sa $P(x), Q(y), R(x, y), ...$ Na primer, ako su objekti iz skupa prirodnih brojeva, iskazi $P(x)$: "x je prost broj", $Q(y)$: "y je paran broj" i $R(x, y)$: "$x \leq y$" mogu biti ili istiniti ili neistiniti. Ako je x proizvoljan objekat, iskaz $F(x)$ je potpuno određen kada znamo x.

Definicija 1.1.10. *Neodređeni iskazi koji zavise od jedne ili više promenljivih nazivaju se* **logičke funkcije** *ili* **predikati**.

Iskazi ili iskazne promenljive i predikati su elementarne formule logike predikata.

Definicija 1.1.11. Formula logike predikata *je svaki konačan izraz formiran od elementarnih iskaza i elementarnih formula logike predikata primenom konačnog broja logičkih operacija* $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Univerzalni kvantifikator $(\forall x)P(x)$ "za svako x, $P(x)$ je istinito"; oznaka potiče od prvog slova engleske reči "all".

Egzistencijalni kvantifikator $(\exists x)P(x)$ "postoji x za koje je $P(x)$ istinito"; oznaka potiče od prvog slova engleske reči "exist".

Na primer, ako je $P(x)$: "$x^2 = 4$", tada je formula $(\forall x)\ x^2 = 4$ neistinita, dok je formula $(\exists x)\ x^2 = 4$ istinita, jer zaista za $x = \pm 2$ važi $x^2 = 4$.

Kada radimo sa kvantifikatorima, obično se koriste sledeće skraćenice:

$$(\forall x \in S)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in S \Rightarrow P(x)),$$
$$(\exists x \in S)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in S \wedge P(x)).$$

Primer 1.1.7. Formula $(\forall x)\ x = x$ je uvek istinita. Formula $(\forall x)(\exists y)\ x + y = 0$ je istinita, jer zaista za proizvoljno x možemo naći broj $y(= -x)$ tako da $x + y = 0$. S druge strane, ako zamenimo mesta univerzalnom i egzistencijalnom kvantifikatoru, dobija se formula $(\exists y)(\forall x)\ x + y = 0$ koja evidentno nije istinita. Dakle, sa zamenom mesta kvantifikatorima treba biti oprezan! (Vidi grafik sa vežbi)

Kvantifikatori pod dejstvom negacije prelaze jedan u drugi:

$$\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\ \neg P(x),$$
$$\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\ \neg P(x).$$

Primer 1.1.8. Posmatrajmo formulu $(\exists m)(\forall n)\ n \leq m$, gde su m, n prirodni brojevi. Ova formula nije istinita, jer ne postoji najveći prirodan broj. Hajde da vidimo kako izgleda negacija ove formule:

$$\neg(\exists m)(\forall n)\ n \leq m \Leftrightarrow (\forall m)\ \neg(\forall n)\ n \leq m \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall m)(\exists n)\ \neg(n \leq m) \Leftrightarrow (\forall m)(\exists n)\ n > m.$$

Poslednja formula je istinita (samim tim i sve prethodne, jer su ekvivalentne), jer kazuje dobro poznatu činjenicu da za svaki prirodan broj m možemo naći prirodna broj n (recimo $n = m + 1$) koji je veći od njega.

1.2 Osnovi teorije skupova

Pojmovi **skup** i **element skupa** su osnovni matematički pojmovi, i kao takvi se ne definišu. U radu sa skupovima zadržaćemo se na intuitivnoj predstavi skupa kao kolekcije izvesnih elemenata, to je tzv. naivna teorija skupova.

Pojam skupa uveo je Kantor[4] krajem XIX veka.

[4]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918), poznati nemački matematičar

Skupove obično označavamo velikim slovima latiničnog alfabeta, a njihove elemente malim slovima. Dobra je praksa pisati npr. a za proizvoljan element skupa A. Za neke skupove koriste se uobičajene oznake: $\mathbb{N}$ (prirodni brojevi), $\mathbb{Z}$ (celi brojevi), $\mathbb{Q}$ (racionalni brojevi), $\mathbb{R}$ (realni brojevi), $\mathbb{C}$ (kompleksni brojevi).

Da bismo označili da element x pripada skupu X koristićemo simbol $\in$ ("pripada"), dok $x \notin X$ znači da element x ne pripada skupu X.

Skup koji nema elemenata naziva se **prazan skup**, i označava sa $\emptyset$ ili $\{\}$.

Definicija 1.2.1. *Ukoliko je dat tzv. univerzalni skup E, tada se skup svih elemenata iz E koji ne pripadaju datom skupu A naziva* **komplement skupa A (u odnosu na skup E)***, i označava sa A^c ili $\bar{A}$.*

Treba napomenuti da je jako bitno u odnosu na koji univerzalni skup se uzima komplement datog skupa. Na primer, ako je dat skup $A = \{2, 6\}$ i dva univerzalna skupa, $E_1 = \{1, 2, 3, ..., 9\}$ i $E_2 = \{2, 4, 6, 8\}$, tada je $A^c_{(E_1)} = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ a $A^c_{(E_2)} = \{4, 8\}$.

Definicija 1.2.2. *Ako svaki element skupa A pripada i skupu B, tj. ako važi $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$, tada za skup A kažemo da je* **podskup** *skupa B, u oznaci $A \subseteq B$ (ili samo $A \subset B$). Kaže se još i da je skup B nadskup skupa A, zapis $B \supseteq A$ (ili samo $B \supset A$).*

Svaki neprazan skup ima bar dva podskupa, prazan skup i sebe: $\emptyset, A \subseteq A$.

Definicija 1.2.3. *Partitivni skup skupa A, u oznaci $\mathcal{P}(A)$, je skup svih podskupova skupa A, odnosno: $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$.*

Partitivni skup je očigledno neprazan skup, pošto $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, dakle skup koji sadrži jedan element. Na primer, ukoliko je dat skup $A = \{a, b, c\}$, tada $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Ukoliko skup A sadrži n elemenata, tada njegov partitivni skup ima tačno 2^n elemenata.

Definicija 1.2.4. *Dva skupa su* **jednaka** *ako i samo ako su sastavljeni od istih elemenata, tj.*

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \land (B \subseteq A) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Ukoliko $A \subseteq B$ i $A \neq B$, tada kažemo da je skup A **pravi podskup** skupa B, u oznaci $A \subsetneq B$ ili $A \subsetneqq B$.

Skupove možemo zadavati i predstavljati na više načina:

- preko zajedničke osobine, $A = \{x : \varphi(x)\}$, gde je $\varphi(x)$ neko svojstvo

- nabrajanjem elemenata, npr. $A = \{2, 3, 5, 7\}$ za skup prostih brojeva manjih od 10, $B = \{4, 8, 16, ...\}$ za skup prirodnih brojeva koji su deljivi sa 4

- preko Venovih dijagrama, koji su pogodni kada radimo sa malim brojem skupova (dva do četiri) koji imaju mnogo zajedničkih preseka

Jedan isti skup može se zadati na više različitih načina. Na primer,

$$A = \{2, 3, 5, 7\} = \{x : x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ je prost broj manji od } 10\}.$$

Kod skupova nije bitan redosled elemenata, ali nisu dopuštena ni višestruka pojavljivanja istog elementa. Na primer, $\{1, 2, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 2\}$.

1.2.1 Skupovne operacije

Definicija 1.2.5. Presek *skupova A i B, u oznaci $A \cap B$, je skup koji čine svi zajednički elementi skupova A i B, tj.*

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Neke osnovne osobine preseka su:

- $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$,

- $A \cap B \subset A,\ A \cap B \subset B$,

- $A \cap \emptyset = \emptyset,\ A \cap A^c = \emptyset$.

Skupovi A i B za koje važi $A \cap B = \emptyset$ su **disjunktni**.

Definicija 1.2.6. Unija *skupova A i B, u oznaci $A \cup B$, je skup koji čine svi elementi koji se nalaze u bar jednom od skupova A i B, tj.*

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Neke osnovne osobine unije skupova su:

- $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$,

- $A \subset A \cup B,\ B \subset A \cup B$,

- $A \cup \emptyset = A,\ A \cup A^c = E$.

Pored unije/preseka dva skupa, može se definisati unija/presek konačne familije skupova:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : (\exists i = \overline{1,n})\ x \in A_i\},$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x : (\forall i = \overline{1,n})\ x \in A_i\}.$$

Definicija 1.2.7. Razlika *skupova A i B, u oznaci $A \setminus B$, je skup koji čine svi elementi koji pripadaju skupu A i ne pripadaju skupu B, tj.*

$$A \setminus B = \{x : x \in A \land x \notin B\}.$$

Sada vidimo da se komplement skupa A u odnosu na univerzalni skup E može izraziti i kao:

$$A^c = E \setminus A.$$

Moše se definisati i **simetrična razlika** skupova A i B, u oznaci $A\Delta B$ (čita se "A delta B"), kao skup

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Istaknimo sada analogiju između skupova i iskaza. Ako sa p označimo iskaz[5] "$x \in A$", a sa q iskaz "$x \in B$", tada:

- univerzalnom skupu E odgovara tautologija, praznom skupu kontradikcija;
- $A \subseteq B$ odgovara iskaz $p \Rightarrow q$;
- $A = B$ odgovara iskaz $p \Leftrightarrow q$;
- A^c odgovara iskaz $\neg p$;
- $A \cap B$ odgovara iskaz $p \land q$, a $A \cup B$ iskaz $p \lor q$;
- razlici $A \setminus B$ odgovara $p \land \neg q$

[5] Preciznije, ovde je reč o predikatskim formulama $P(x)$ i $Q(x)$. Na primer, $A = B$ odgovara $(\forall x)(P(x) \Leftrightarrow Q(x))$.

1.2.2 Dekartov prozvod skupova

Definicija 1.2.8. Uređeni par *elemenata a i b je dvoelementni skup:*

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Element a naziva se prva komponenta (projekcija) uređenog para, dok je b druga komponenta. Za razliku od skupova, gde nije bitan redosled elemenata (dakle, $\{a, b\} = \{b, a\}$), kod uređenih parova redosled je od suštinske važnosti. Koristeći definiciju jednakosti skupova, uređeni parovi (a, b) i (b, a) su jednaki ako i samo ako su jednaki skupovi $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ i $\{\{b\}, \{b, a\}\}$, a oni mogu biti jednaki ako i samo ako $a = b$.

Dva uređena para, (a, b) i (a_1, b_1) su jednaki akko $a = a_1$ i $b = b_1$.

Slično uređenom paru može se definisati i uređena $n-$torka. Na primer, uređena trojka je $(a, b, c) = (a, (b, c))$.

Definicija 1.2.9. *Neka su A i B neprazni skupovi. Pod* **Dekartovim**[6] **proizvodom skupova** *A i B, u oznaci $A \times B$, podrazumeva se skup svih uređenih parova (a, b), gde je prva komponenta iz skupa A, a druga iz skupa B:*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Ukoliko je bar jedan od skupova A i B prazan, uzima se da je i njihov Dekartov proizvod prazan skup.

Primer 1.2.1. Dati su skupovi $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{0, 1\}$. Dekartovi proizvodi $B \times B$, $A \times B$ i $B \times A$ su:

$$\begin{aligned}
B \times B &= \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\},\\
A \times B &= \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\},\\
B \times A &= \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}.
\end{aligned}$$

Ovaj primer ilustruje činjenicu da Dekartov proizvod nije komutativan, tj. za neprazne i različite skupove A i B važi

$$A \times B \neq B \times A.$$

Ukoliko skup A ima m, a skup B n elemenata, tada skup $A \times B$ sadrži tačno $m \cdot n$ uređenih parova.

Analogno Dekartovom proizvodu dva skupa, može se definisati i Dekartov proizvod n skupova kao skup $n-$torki:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

[6] René Descartes (1596–1650), poznati francuski matematičar i filosof

Ukoliko se uzima Dekartov proizvod skupa A sa samim sobom dovoljan broj puta, mogu se uvesti Dekartovi stepeni skupa:

$$A^0 = \emptyset,\ A^1 = A,\ A^2 = A \times A,\ \ldots, A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n}.$$

Za nas će biti posebno značajan $A \times A$, Dekartov kvadrat skupa A, za uvođenje biarnih relacija i funkcija u narednim poglavljima.

1.2.3 Osobine skupovnih operacija

1. idempotentnost: $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$;
2. komutativnost: $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$;
3. asocijativnost: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
4. distributivnost: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
5. De Morganovi zakoni: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Dokaz ovih osobina (i mnogih drugih skupovnih izraza) može se izvesti na bar tri načina: korišćenjem iskazne logike, preko tablica istinitosti odgovarajućih iskaza ili preko Venovih dijagrama. Dokažimo, na primer, distributivnost preseka prema uniji: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) \quad & \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Neke osobine Dekartovog proizvoda, unije i preseka:

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
- $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

1.3 Relacije

Uviđanje veza između izvesnih objekata predstavlja jedno od osnovnih svojstava ljudskog mišljenja. Na primer, među osobama koje se nalaze na nekoj zabavi lako se uviđa koje osobe se međusobno poznaju. Takođe, posle nekog vremena skup ljudi sa zabave se podeli na manje grupe koje imaju zajednička interesovanja, teme razgovora, muzički ukus i slično. Drugi primer, kada se pravi spisak studenata, to se može uraditi na mnogo načina. Međutim, spisak gde su studenti poređani po rastućem broju indeksa ili po prezimenima ima prednosti, jer omogućava lakše snalaženje. Takve veze između izvesnih objekata u matematici se predstavljaju kroz relacije.

Definicija 1.3.1. *Neka su A i B neprazni skupovi. Svaki podskup $\rho \subset A \times B$ naziva se* **binarna relacija** *u skupu $A \times B$. Specijalno, ako je $A = B$, kaže se da je $\rho \subset A^2$ binarna relacija skupa A.*

Relacije se obično označavaju malim slovima grčkog alfabeta: ρ, σ, ..., i njih možemo zadavati i predstavljati na razne načine:

- navođenjem svih elemenata koji jesu (ili nisu) u relaciji; pogodno za relacije kod kojih su skupovi konačni, sa malim brojem elemenata.

- analitički zapis.

- tablično: u vrstama se nalaze elementi skupa A, u kolonama elementi skupa B: ako je element a iz $i-$te vrste u relaciji sa elementom b iz $j-$te kolone, onda stavljamo $\top$ ili 1 u preseku $i-$te vrste i $j-$te kolone matrice, a ako nije u relacije, stavlja se $\perp$ ili 0.

- grafički prikaz: konačni skupovi A i B predstave se Venovim dijagramima, i kada je a iz A u relaciji sa b iz B crta se linija sa strelicom od a do b.

- orijentisani graf; pogodan za slučaj konačnog skupa $A = B$. Svakom elementu skupa A pridružuje se jedan čvor grafa, a ako je a_1 u relaciji sa a_2 onda se crta grana sa strelicom koja počinje u čvoru a_1 a završava se u a_2. Ukoliko a_1 u relaciji sa a_1, tada grana izlazi iz a_1 i vraća se u njega - tzv. petlja.

Na potpuno analogan način može se definisati i $n-$arna relacija (relacija dužine n) kao podskup Dekartovog proizvoda $\rho \subset A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Za $n = 1$ obično se kaže **unarna relacija**, za $n = 2$ **binarna**, za $n = 3$ **ternarna**. Dakle, unarna relacija je proizvoljan podskup datog skupa. Mi ćemo se baviti binarnim relacijama.

Posmatramo relaciju $\rho \subset A \times B$; ukoliko su elementi $a \in A$ i $b \in B$ u relaciji ρ, to zapisujemo kao $(a, b) \in \rho$ ili $a\rho b$. Ukoliko a i b nisu u relaciji ρ, zapisujemo $(a, b) \notin \rho$. Napomenimo da je, pošto radimo sa uređenim parovima, redosled bitan, te u opštem slučaju može biti $a\rho b$, ali ne i $b\rho a$.

Primer 1.3.1. Primeri nekih relacija:

1. Kako je $\rho \subseteq A \times B$, slučajevi $\rho = \emptyset$ i $\rho = A \times B$ opisuju trivijalne relacije; kod prve nijedan element iz $a \in A$ nije u relaciji ni sa jednim elementom $b \in B$, dok kod druge svaki element $a \in A$ je u relaciji sa svim elementima $b \in B$. Ukoliko $A = B$, važna relacija je i *identička relacija*, definisana kao $\Delta_A = \{(a, a) : a \in A\}$.

2. Kao što smo već rekli, unarnom relacijom može se smatrati svaki podskup datog skupa.

3. Primer ternarne relacije je relacija "y je između x i z" definisana na skupu tačaka date prave. Zatim, relacija "osoba A je predstavila osobu B osobi C" na datom skupu osoba je ternarna relacija.

4. Neka su dati skupovi $A = \{1, 2\}$ i $B = \{a, b, c\}$. Primer binarne relacije je $\rho = \{(1, a), (1, c), (2, c)\}$.

5. Na skupu $A = \{1, 2, 3, 4\}$ možemo definisati relaciju na sledeći način: $x\rho y \Leftrightarrow x < y$. Dakle, $\rho = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

Svakoj relaciji pridružuju se dva skupa. **Domen relacije** $\rho \subset A \times B$ je skup svih elemenata skupa A koji su u relaciji sa nekim elementom skupa B:

$$\mathcal{D}(\rho) = \{a \in A : (\exists b \in B)\ a\rho b\}.$$

Skup vrednosti relacije ρ je skup svih elemenata iz B sa kojima je u relaciji neki element iz A:

$$\mathcal{R}(\rho) = \{b \in B : (\exists a \in A)\ a\rho b\}.$$

Jasno, $\mathcal{D}(\rho) \subseteq A$, $\mathcal{R}(\rho) \subseteq B$.

Primer 1.3.2. Za relaciju iz primera 1.3.1.4) je $\mathcal{D}(\rho) = A$, $\mathcal{R}(\rho) = \{a, c\}$, dok je za relaciju iz primera 1.3.1.5) $\mathcal{D}(\rho) = \{1, 2, 3\}$, dok je $\mathcal{R}(\rho) = \{2, 3, 4\}$. Domen i slika identičke relacije Δ_A poklapaju se sa skupom A.

Definicija 1.3.2. *Ako je $\rho \subset A \times B$, tada je* **inverzna relacija** *relacije ρ skup $\rho^{-1} \subset B \times A$ definisan kao*

$$\rho^{-1} = \{(a, b) : (b, a) \in \rho\}.$$

Dakle, $a\rho b \Leftrightarrow b\rho^{-1}a$, za sve $a \in A$ i $b \in B$. Lako se vidi da $\mathcal{D}(\rho^{-1}) = \mathcal{R}(\rho)$ i $\mathcal{R}(\rho^{-1}) = \mathcal{D}(\rho)$.

Primer 1.3.3. Za relaciju iz primera 1.3.1.4) je $\rho^{-1} = \{(a, 1), (c, 1), (c, 2)\}$, a za relaciju iz primera 1.3.1.5) $\rho^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$. Inverzna relacija identičke relacije Δ_A je sama ta relacija.

Definicija 1.3.3. Proizvod (kompozicija) relacija *$\sigma \subset A\times B$ i $\rho \subset B\times C$ je relacija $\rho \circ \sigma \subset A \times C$ data sa*

$$\rho \circ \sigma = \{(x, y) : (\exists z \in B)\ x\sigma z \wedge z\rho y\}.$$

Očigledno je $\mathcal{D}(\rho \circ \sigma) \subset \mathcal{D}(\sigma)$ i $\mathcal{R}(\rho \circ \sigma) \subset R(\rho)$. U opštem slučaju, proizvod dveju relacija ne mora biti definisan (ubaci primer). Da bi bio definisan, mora da bude $\mathcal{D}(\rho) \cap \mathcal{R}(\sigma) \neq \emptyset$. Ukoliko je u pitanju binarna relacija ρ na skupu A, onda se može definisati **stepen relacije** ρ na sledeći način:

$$\rho^2 = \rho \circ \rho,\ \rho^3 = \rho^2 \circ \rho, \ldots$$

Kompozicija relacija se vrlo lako izvodi korišćenjem grafičkog prikaza

Tvrđenje 1.3.1. *Za proizvoljne relacije ρ, σ, τ važi:*

1. $\rho \circ (\sigma \circ \tau) = (\rho \circ \sigma) \circ \tau$.
2. $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$.

1.3.1 Neke osobine binarnih relacija

Definicija 1.3.4. *Binarna relacija $\rho \subset A^2$ je:*

(R) **refleksivna** *ako* $(\forall x \in A)\ x\rho x$;

(S) **simetrična** *ako* $(\forall x, y \in A)\ x\rho y \Rightarrow y\rho x$;

(AS) **antisimetrična** *ako* $(\forall x, y \in A)\ x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$;

(T) **tranzitivna** *ako* $(\forall x, y, z \in A)\ x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$.

Ukoliko je poznata tablica relacije, tada:

- ukoliko su samo vrednosti $\top$ po glavnoj dijagonali, relacija je (R);
- ako je tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu, relacija je (S);

- Kriterijum za antisimetričnost može se izraziti i kao:

$$(\forall x, y \in A)\ (x, y) \in \rho \wedge x \neq y \Rightarrow (y, x) \notin \rho.$$

  Prema tome, ako je tablica antisimetrčna u odnosu na glavnu dijagonalu (tj. ako je svako $\top$ simetrično sa $\perp$ i obratno), relacija je (AS);

- za osobinu (T) nema lepog kriterijuma.

Na osnovu grafa relacije, možemo zaključiti sledeće:

- ako svaki čvor ima petlju, relacija je (R);
- ako svakoj grani iz a u b odgovara grana iz b u a, onda je (S);
- ako između svaka dva čvora postoji najviše jedna grana, onda je (AS);
- ako je graf kvadrata relacije sadržan u grafu relacije, to je svojstvo (T).

Još jedan kriterijum za prepoznavanje osobina relacija na skupu daje naredno tvrđenje.

Tvrđenje 1.3.2. *Binarna relacija $\rho \subset A^2$ je:*

1. *refleksivna ako i samo ako $\Delta_A \subset \rho$,*
2. *simetrična ako i samo ako $\rho^{-1} = \rho$,*
3. *antisimetrična ako i samo ako $\rho \cap \rho^{-1} \subset \Delta_A$;*
4. *tranzitivna ako i samo ako $\rho \circ \rho \subset \rho$.*

Proof. $(\Rightarrow)$: Relacije ρ je refleksivna, tj. $(\forall x \in A)\ (x, x) \in \rho$. Kako je $\Delta_A = \{(x, x) : x \in A\}$, zaključujemo da $\Delta_A \subset \rho$.

Uzmimo $(x, y) \in \rho^{-1}$, to je po definiciji ekvivalentno sa $(y, x) \in \rho$, a relacija ρ je (S), te zato sledi $(x, y) \in \rho$, tj. dobija se $\rho^{-1} \subset \rho$. S druge strane, $(x, y) \in \rho \Leftrightarrow (y, x) \in \rho^{-1} \Rightarrow (x, y) \in \rho$, odnosno $\rho \subset \rho^{-1}$, te zato $\rho = \rho^{-1}$.

Ako je ρ antisimetrična, onda $(\forall x, y \in A)\ (x, y) \in A \wedge (y, x) \in A \Rightarrow x = y$, odnosno $\rho \cap \rho^{-1} \subset \Delta_A$.

Uzmimo $(x, y) \in \rho^2$; po definiciji kompozicije $(\exists z)\ (x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \rho$. Relacija ρ je tranzitivna, te zato $(x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \rho \Rightarrow (x, y) \in \rho$, tj. $\rho^2 \subset \rho$.

$(\Leftarrow)$: $\Delta_A \subset \rho$ znači da $(\forall x \in A)\ (x, x) \in \rho$, tj. ρ je refleksivna relacija.

$(x, y) \in \rho \Leftrightarrow (y, x) \in \rho^{-1}$ zajedno sa $\rho^{-1} = \rho$ daju $(y, x) \in \rho$, tj. dokazali smo osobinu simetričnosti.

$(x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \rho \Rightarrow (x, y) \in \rho^2$ sa $\rho^2 \subset \rho$ daje $(x, y) \in \rho$, tj. relacija je tranzitivna.

Osobina antisimetričnosti je jasna, čime smo kompletirali dokaz. $\square$

Napomena: Kako su relacije u stvari skupovi (uređenih parova), sa njima se mogu izvoditi skupovne operacija kao npr. unija i presek. U tom smislu treba shvatiti stavku 3 iz prethodnog tvrđenja.

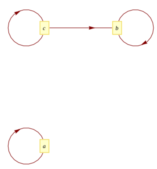
Primer 1.3.4. Dat je skup $A = \{a, b, c\}$ i binarna relacija $\rho \subset A^2$ na njemu, definisana na sledeći način:

$$\rho = \{(a, a), (b, b), (c, b), (c, c)\}.$$

Tablični prikaz i graf ove relacije su:

ρ	a	b	c
a	$\top$	$\bot$	$\bot$
b	$\bot$	$\top$	$\bot$
c	$\bot$	$\top$	$\top$

,



Kako su po glavnoj dijagonali tablice sve vrednosti $\top$, relacija je refleksivna. Relacija nije simetrična, jer $(c, b) \in \rho$, ali $(b, c) \notin \rho$. Nije ni antisimetrična, jer $\rho^{-1} = \Delta_A \cup \{(b, c)\} \neq \Delta_A \cup \{(c, b)\} = \rho$. Tranzitivnost važi, jer je $\rho^2 = \rho$, što se najbolje vidi sa grafičkog prikaza relacije.

1.3.2 Relacije ekvivalencije

Definicija 1.3.5. *Relacija $\rho \subset A^2$ koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna naziva se* **relacija ekvivalencije***.*

Nekad se za relaciju ekvivalencije koristi simbol $\sim$ ("tilda").

Definicija 1.3.6. *Neka je $\rho \subset A^2$ relacija ekvivalencije. Skup svih $y \in A$ koji su u relaciji sa elementom $x \in A$ naziva se* **klasa ekvivalencije** *elementa x, u oznaci $[x]$ ili C_x:*

$$[x] = \{y \in A : x\rho y\}.$$

Primer 1.3.5. Definišimo na skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$ relaciju na sledeći način - dva broja $x, y \in \mathbb{Z}$ su u relaciji ako imaju isti ostatak pri deljenju sa 4:

$$x\rho y \Leftrightarrow x \equiv_4 y \Leftrightarrow 4|x - y.$$

Pokažimo da je $\equiv_4$ relacija ekvivalencije.

(R): $(\forall x \in \mathbb{Z})\ 4|x - x = 0$, što jeste tačno;

(S): $(\forall x, y \in \mathbb{Z})\ 4|x-y \Rightarrow 4|-(x-y) = y-x$, što važi;

(T): $(\forall x, y, z \in \mathbb{Z})\ 4|x-y \wedge 4|y-x \Rightarrow 4|(x-y)+(y-z) = x-z$, tj. važi i tranzitivnost.

Prema tome, relacija $\equiv_4$ je zaista relacija ekvivalencije.

Odredimo sada klase ekvivalencije.

$$\begin{aligned}
[0] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_4 0\} = \{x \in \mathbb{Z} : 4|x\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\},\\
[1] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_4 1\} = \{x \in \mathbb{Z} : 4|x-1\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\},\\
[2] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_4 2\} = \{x \in \mathbb{Z} : 4|x-2\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\},\\
[3] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_4 3\} = \{x \in \mathbb{Z} : 4|x-3\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\},\\
[4] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_4 4\} = \{x \in \mathbb{Z} : 4|x-4\} = \{x \in \mathbb{Z} : 4|x\} = [0].
\end{aligned}$$

Dakle, relacija kongruencije po modulu 4 na skupu celih brojeva ima 4 klase ekvivalencije, što zapisujuemo na sledeći način:

$$\mathbb{Z}/\equiv_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}.$$

Svaki ceo broj pripada tačno jednoj klasi

$$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3],$$

i svaka klasa sadrži samo one brojeve koji pri deljenju sa 4 daju isti ostatak.

Definicija 1.3.7. *Familija* $\{A_i, i = \overline{1, n}\}$ *nepraznih disjunktnih podskupova datog skupa* A *naziva se* **razbijanje** *ili* **particija** *skupa* A *ako*

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Primer trivijalnog razbijanja skupa $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ je familija skupova $A_1 = \{a_1\}, A_2 = \{a_2\}, A_3 = \{a_3\}$. Drugo razbijanje je $B_1 = \{a_1, a_3\}, B_2 = \{a_2\}$; međutim $C_1 = \{a_1, a_2\}, C_2 = \{a_2, a_3\}$ nije razbijanje jer $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, kao što ni familija A_1, A_2 nije razlaganje skupa A jer $A \neq A_1 \cup A_2$.

Tvrđenje 1.3.3. *Relacija ekvivalencije na skupu definiše razbijanje tog skupa. Obratno, svako razbijanje datog skupa indukuje relaciju ekvivalencije na tom skupu.*

Proof. Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu A. Pošto je relacija ρ refleksivna, svaki element skupa a je u relaciji makar sa samim sobom, te pripada nekoj klasi ekvivalencije. Iz istog razloga je svaka klasa ekvivalencije neprazna. Posmatramo $x, y \in A$ takve da $(x, y) \notin \rho$; treba dokazati da njihove klase ekvivalencije imaju prazan presek. Pretpostavimo suprotno, da postoji neko $z \in A$ tako da $z \in [x] \cap [y]$. Po definiciji, to znači da $x\rho z \wedge y\rho z$. Zbog simetričnosti i tranzitivnosti, imamo

$$x\rho z \wedge z\rho y \Rightarrow x\rho y,$$

što je u suprtnosti sa $(x, y) \notin \rho$. Dakle, naša pretpostavka je pogrešna, te elementi koji nisu u relaciji pripadaju disjunktim klasama.

Neka su sada $x, y \in A$ takvi da $x\rho y$. Po definiciji, to znači da $y \in [x]$. Zbog simetričnosti je $y\rho x$, odsnosno $x \in [y]$. Prema tome, $[x] = [y]$.

Obratno, ako je $\{A_1, \dots, A_n\}$ razbijanje skupa, možemo definisati relaciju ρ na skupu A na sledeći način: $x\rho y \Leftrightarrow (\exists i = \overline{1, n})\ x, y \in A_i$. Lako se pokazuje da je ρ zaista relacija ekvivalencije.

$\square$

Primer 1.3.6. Neka je dato razbijanje skupa $\mathbb{Z}$

$$\mathcal{P} = \{P_0 = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}, P_1 = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}\}.$$

Definišimo relaciju ρ na sledeći način:

$$(\forall x, y \in \mathbb{Z})\ x\rho y \Leftrightarrow (x \in P_1 \wedge y \in P_1) \vee (x \in P_2 \wedge y \in P_2).$$

Očigledno je ρ relacija ekvivalencije koja se poklapa sa relacijom "x i y su iste parnosti".

1.3.3 Relacije poretka

Definicija 1.3.8. *Relacija $\rho \subset A^2$ koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna naziva se* **relacija poretka** *ili* **uređenje**. *Skup A na kojem je definisana relacija poretka ρ naziva se* **(delimično) uređen skup**.

Često se za relaciju poretka koriste i simboli "$\leq$" ili "$\preceq$".

Neka je (A, ρ) uređen skup. Ukoliko za $x, y \in A$ važi ili $x\rho y$ ili $y\rho x$, tada su elementi x i y **uporedivi**. Ako su svi elementi skupa A međusobno uporedivi, tada je skup A **potpuno uređen**, **linearno uređen** ili **lanac**.

Primer 1.3.7. Pokazaćemo raznovrsnost relacija poretka.

1. Skup realni brojeva $\mathbb{R}$ sa relacijom $\leq$ je primer linearno uređenog skupa, zato što za svaka dva realna broja znamo koji broj nije veći od kog.

2. Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ sa relacijom deljivosti $|$ je primer uređenog skupa koji nije linearno uređen, jer postoje neuporedivi prirodni brojevi, npr. niti $2|3$, niti $3|2$.

3. Za dati skup A, partitivni skup $\mathcal{P}(A)$ sa relacijom inkluzije $\subseteq$ je uređen skup, ali nije linearno uređen, jer postoje podskupovi koji nisu uporedivi relacijom inkluzije. Na primer, ako je $A = \{a, b\}$, tada za skupove $S = \{a\}, T = \{b\}$ ne važi ni $S \subseteq$ ni $T \subseteq S$.

4. Ukoliko su $(A, \leq_A)$ i $(B, \leq_B)$ uređeni skupovi, tada na skupu $A \times B$ možemo na razne načine uvesti uređenje. Najpoznatije je **leksikografsko uređenje** koje se definiše na sledeći način:

$$(a, b) \leq_{lex} (a_1, b_1) \Leftrightarrow a <_A a_1 \vee (a = a_1 \wedge b \leq_B b_1).$$

   Dakle, uređeni parovi se upoređuju prema prvoj komponenti, a ako su prve komponente jednake, onda prema drugoj. Na primer, ako su $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{0, 1\}$ uređeni skupovi ($a \leq b \leq c,\ 0 \leq 1$), onda $(a, 0) \leq_{lex} (b, 0)$ i $(b, 0) \leq_{lex} (b, 1)$. Na ovaj način se sortira npr. spisak studenata po azbučnom redu.

Definicija 1.3.9. *Neka je (X, ρ) uređen skup.*

1. *Element $a \in X$ takav da $(\forall x \in X)\ a\rho x$ naziva se* **najmanji element** *skupa X.*

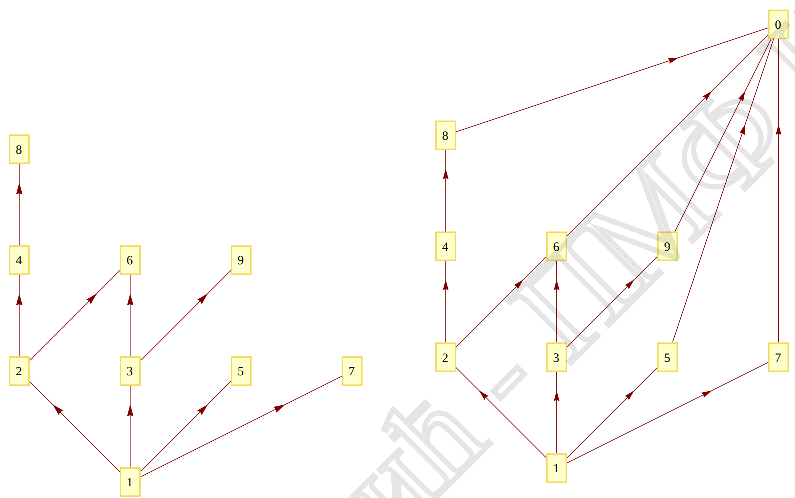
2. *Element $a \in X$ takav da $(\forall x \in X)\ x\rho a$ naziva se* **najveći element** *skupa X.*

3. *Element $a \in X$ takav da $(\forall x \in X)\ x = a \vee \neg(x\rho a)$ naziva se* **minimalni element** *skupa X.*

4. *Element $a \in X$ takav da $(\forall x \in X)\ x = a \vee \neg(a\rho x)$ naziva se* **maksimalni element** *skupa X.*

Drugim rečima, najmanji element je manji (u odnosu na relaciju ρ) od svih ostalih elemenata, dok je minimalni element manji od svih sa kojima je uporediv. Dualno važi za najveći i maksimalni element. Na grafu relacije poretka iz čvora koji odgovara najmanjem elementu vodi grana ka svim ostalim čvorovima, dok u čvor koji odgovara najvećem elementu ulaze grane iz svih ostalih čvorova. Minimalni elementi se prepoznaju po tome što iz njihovih čvorova samo izlaze grane, dok čvorovi u koje samo ulaze grane odgovaraju maksimalnim elementima.

Primer 1.3.8. Posmatramo uređen skup $(X = \{1, 2, \dots, 9\}, |)$. Element $a \in X$ je najmanji ako $(\forall x \in X)\ a|x$, a to može biti samo $a = 1$. Maksimalni element ne postoji, jer ne postoji $b \in X$ takav da $(\forall x \in X)\ x|b$ (to bi bio npr. najmanji zajednički sadržalac brojeva skupa X, ali on ne pripada u X). Element $a \in X$ je minimalan ako $(\forall x \in X)\ x = a \vee x \nmid a$; znači 1 je minimalan, jer $x = 1 \vee x \nmid 1$ je istinito i za $x = 1$ (svodi se na $\top \vee \bot \Leftrightarrow \top$), i za $x \neq 1$ (svodi se na $\bot \vee \top \Leftrightarrow \top$). Element 2 nije minimalan, jer za $x = 1$ imamo kontradikciju; isto važi i za ostale. Dakle, minimalni element je 1. Element 5 je maksimalan pošto $(\forall x \in X)\ x = 5 \vee 5 \nmid x$, dok element 3 nije jer za $x = 6$ dobijamo kontradikciju. Dakle, maksimalni elementi su 5, 6, 7, 8 i 9.



Ukoliko posmatramo skup $(X_1 = \{2, 3, \dots, 9\}, |)$, ne postoje ni najmanji ni najveći element. Minimalni elementi su 2, 3, 5 i 7, a maksimalni 5, 6, 7, 8 i 9. Primetimo da su 5 i 7 istovremeno i minimalni i maksimalni elementi (u grafu njima odgovaraju izolovani čvorovi).

Ako se pozabavimo uređenim skupom $(X_0 = \{0, 1, \dots, 9\}, |)$, i dalje je 1 najmanji (i jedini minimalni) element, ali zato sada imamo i najveći (i jedini maksimalni) element - 0.

Posmatramo li linearno uređen skup $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$, on ima najmanji element 1 i najveći element 4.

Tvrđenje 1.3.4. *Ako postoji najmanji (najveći) element skupa X u odnosu na relaciju ρ, tada je on jedinstven.*

Proof. Pretpostavimo suprotno, da postoje dva najmanja elmenta, m_1 i m_2. Tada imamo $m_1 \rho m_2$ i $m_2 \rho m_1$, odakle zbog antisimetričnosti relacije ρ sledi $m_1 = m_2$. Dualno za najveći element. $\square$

Za grafičko predstavljanje uređenih konačnih skupova koriste se Haseovi[7] dijagrami. Za razliku od klasičnih grafova, oni sadrže čvorove organizovane na određeni način i znatno manje grana, te su pregledniji. Element $x \in X$ je **neposredni prethodnik** elementa $y \in X$ ako

$$(\forall z \in X)\ x\rho z \wedge z\rho y \Rightarrow z = x \vee z = y,$$

tj. nijedan element se ne može "umetnuti" između x i y. Pomoću pojma neposrednog prethodnika za svaki element određuje se njegov **nivo**. Element x je na nivou 0 ako nema neposrednih prethodnika. U suprotnom, element x je na nivou $k > 0$ ako ima bar jednog neposrednog prethodnika na nivou $k-1$ dok su svi ostali njegovi prethodnici na nivou ne većem od $k-1$.

Čvorovi se sada raspoređuju na sledeći način po nivoima, počevši od nivoa 0 na dnu, i svaki čvor se spaja linijama sa svim svojim neposrednim prethodnicima.

Definicija 1.3.10. *Neka je dat uređen skup $(X, \leq)$ i neka $A \subset X$.*

1. *Element $x \in X$ je* **majoranta** *(gornja granica, gornja međa) skupa A ako $(\forall a \in A)\ a \leq x$.*

2. *Element $x \in X$ je* **minoranta** *(donja granica, donja međa) skupa A ako $(\forall a \in A)\ x \leq a$.*

Skup koji ima bar jednu majorantu/minorantu je ograničen odozgo/odozdo; skup koji je ograničen i odozgo i odozdo je **ograničen**.

Najmanja od svih majoranti skupa A, ako postoji, naziva se **supremum** skupa A, u oznaci $\sup A$. Ukoliko supremum pripada skupu A, naziva se **maksimum**, i označava sa $\max A$. Dualno se definišu **infimum** i **minimum** skupa, $\inf A$ i $\min A$. Dakle,

$$x = \max A \Leftrightarrow x \in A \wedge (\forall a \in A)\ a \leq x;$$

$$x = \sup A \Leftrightarrow i)(\forall a \in A)\ a \leq x \wedge ii)(\forall a \in A)\ a \leq y \Rightarrow x \leq y.$$

Primer 1.3.9. Skup $A = (-\infty, -1]$ je ograničen odozgo u skupu $\mathbb{R}$, i skup njegovim majoranti je $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$. Kako ovaj skup majoranti ima minimum, postoji $\sup A = -1$, koji je istovremeno i maksimum jer pripada skupu A. Skup A nije ograničen odozdo jer nema nijednu realnu minorantu.

Skup $B = [-1, 1)$ je ograničen, i skup njegovih minoranti je $\{y \in \mathbb{R} : y \leq -1\}$, a skup majoranti $\{z \in \mathbb{R} : z \geq 1\}$. Skup minoranti ima maksimum, te $\inf B = -1$, skup majoranti ima minimum, i zato $\sup B = 1$. Kako

[7] Helmut Hasse (1898–1979), nemački matematičar

$\inf B \in B$, postoji $\min B = \inf B = -1$, dok zbog $\sup B = 1 \notin B$ maksimum $\max B$ ne postoji.

Skup $C = [0, \sqrt{2})$ je ograničen u $\mathbb{Q}$, $\inf C = \min C = 0$, ali supremum (ni maksimum) ne postoje jer $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Definicija 1.3.11. *Skup* $(X, \leq)$ *je* **dobro uređen** *ako svaki njegov neprazan podskup sadrži minimum.*

Primer dobro uređenog skupa je $(\mathbb{N}, \leq)$.

1.4 Funkcije

Funkcijske relacije, ili kraće - funkcije, predstavljaju posebnu vrstu relacija kod kojih je svaki elementu domena u relaciji sa tačno jednim elementom iz slike te relacije. Pritom se može desiti sledeće:

- domen relacije nije ceo skup,
- kodomen relacije nije ceo skup.

Prvi problem se često rešava tako što se postavi da "odlazni" skup bude jednak domenu relacije.

Definicija 1.4.1. *Neka su dati neprazni skupovi* A *i* B*. Relacija* $f \subset A \times B$ *za koju važi:*

1. $(\forall x \in A)(\exists y \in B)\ (x, y) \in f$;
2. $(\forall x \in A)(\forall y, z \in B)\ (x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$;

naziva se **funkcija**.

Umesto $(x, y) \in f$ piše se $y = f(x)$. Pritom se x obično zove **argument**, **original** ili **(nezavisno) promenljiva**, dok je y **slika** ili **vrednost funkcije**. Sa $\mathcal{D}(f)$ označava se **domen funkcije** ili **oblast definisanosti**, dok je $\mathcal{R}(f)$ **kodomen funkcije** ili **skup vrednosti**.

Dakle, funkcija predstavlja određeno pravilo po kojem se elementima jednog skupa pridružuju elementi drugog skupa, i pritom jednom originalu odgovara najviše jedna slika. Paralelno sa terminom funkcija, koristićemo i termin preslikavanje.

Ukoliko su u pitanju konačni skupovi, funkcija se može zadavati i predstavljati tablično ili grafički. Obično je pogodniji analitički zapis. Neki primeri funkcija:

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1},\ z(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},\ h(x) = \int\limits_0^x f(t)dt,\ \chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Tablica funkcijske relacije sadrži u svakoj koloni najviše jedan simbol $\top$; iz svakog čvora grafa funkcijske relacije može izlaziti samo jedna grana, računajući i petlje. Elementu koji ne pripada oblasti definisanosti funkcije odgovara kolona popunjena simbolima $\perp$ u tablici, odnosno izolovani čvor grafa.

Svaka funkcija se može potpuno opisati kao uređena trojka $(\mathcal{D}(f), \mathcal{R}(f), f)$, tj. promenom bar jednog od ova tri elementa menja se i sama funkcija.

Definicija 1.4.2. *Dve funkcije f i g su jednake ako:*

1. $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g)$,
2. $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(g)$,
3. $(\forall x \in \mathcal{D}(f))\ f(x) = g(x)$.

Primer 1.4.1. Funkcije $f(x) = x^2 - 1$ i $f_1(x) = (x-1)(x+1)$ su jednake, jer su im jednaki domeni (skup $\mathbb{R}$), kodomeni (skup $[-1, +\infty)$) i same funkcije. Funkcije $g(x) = \frac{x+1}{x+1}$ i $g_1(x) = 1$ nisu jednake, jer je $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ a $\mathcal{D}(g_1) = \mathbb{R}$.

Definicija 1.4.3. *Ako $\mathcal{D}(f), \mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}$, onda se skup*

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}(f)\}$$

naziva **grafik funkcije** f.

Ukoliko su domen i kodomen funkcije podskupovi skupa $\mathbb{R}$, takve funkcije zvaćemo realnim funkcijama, i one će biti predmet našeg izučavanja. Grafik realne funkcije se može interpretirati kao skup tačaka Dekartove ravni xOy.

Definicija 1.4.4. *Funkcija g je* **restrikcija** *funkcije f ako $\mathcal{D}(g) \subset \mathcal{D}(f)$ i $(\forall x \in \mathcal{D}(g))\ f(x) = g(x)$. Kaže se još i da je funkcija f* **ekstenzija** *funkcije g.*

Ukoliko je funkcija g restrikcija funkcije f na skup $D \subset \mathcal{D}(f)$, pisaćemo $g = f|_D$.

Primer 1.4.2. Funkcija $f_1(x) = x^2 : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ je restrikcija funkcije $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$. Funkcija $f(n) = n! : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ može se proširiti na realne brojeve kao tzv. gama funkcija:

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Dakle, gama funkcija je ekstenzija funkcije faktorijel.

1.4.1 Osobine funkcija

Videli smo iz definicije da funkcija ne sme da šalje jedan isti original u dve različite slike (načelo jednoznačnosti). Biće nam od interesa kako funkcije kod kojih svakoj slici odgovara drugi original, tako i funkcije kod kojih je kodomen ceo skup B.

Definicija 1.4.5. *Funkcija* $f : A \to B$ *za koju*

$$(\forall x_1, x_2 \in A)\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

je **injektivna funkcija**, **injekcija** *ili* **"1-1"**.

Ukoliko se iskoristi tautologija $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, uslov injektivnosti može se zapisati kao

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

tj. istim slikama odgovaraju isti originali.

Definicija 1.4.6. *Funkcija* $f : A \to B$ *za koju*

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)\ f(x) = y$$

je **surjektivna**, **surjekcija** *ili* **"na"**.

Dakle, funkcija je surjektivna ako svakoj slici iz celog skupa B odgovara neki original iz domena funkcije.

Slika skupa $D \subset \mathcal{D}(f)$ funkcijom $f : A \mapsto B$ definiše se kao skup koji čine slike svakog od elememata skupa D:

$$f(D) = \{f(a) : a \in D\}.$$

U opštem slučaju je $f(A) \subseteq B$; funkcija f je "na" akko $f(A) = B$.

Definicija 1.4.7. *Funkcija je* **bijektivna** *ako je "1-1" i "na".*

Definicija 1.4.8. *Neka su date funkcije* $f : A \to B$ *i* $g : C \to D$*. Ukoliko* $f(A) \subset B \cap C$*, može se definisati* **proizvod (kompozicija) preslikavanja** f *i* g *kao preslikavanje* $g \circ f : A \to D$ *takvo da:*

$$(\forall a \in A)\ (g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Kompozicija funkcija je asocijativna ($f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$), dok u opštem slučaju nije komutativna ($f \circ g \neq g \circ f$), kao što pokazuje naredni primer.

Primer 1.4.3. Date su funkcije $f(x) = -x^2 - 1 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ i $g(x) = \sqrt{x} : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$. Funkcija $f \circ g$ je:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -(\sqrt{x})^2 - 1 = -x - 1,$$

dok $g \circ f$ nije ni definisana, jer

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{-x^2 - 1}.$$

Tvrđenje 1.4.1. *Neka $f : A \mapsto B$, $g : B \mapsto C$. Tada:*

1. *ako su f i g ”1-1”, tada je i $g \circ f$ ”1-1”;*
2. *ako su f i g ”na”, tada je i $g \circ f$ ”na”.*

Proof.

1. Neka su $a_1, a_2 \in A$ takvi da $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$. To je, po definiciji, ekvivalentno sa $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, a kako je g ”1-1”, sledi da $f(a_1) = f(a_2)$. Kako je i f ”1-1”, sledi $a_1 = a_2$, čime smo dokazali da je $g \circ f$ ”1-1”.
2. Neka je $c \in C$ proizvoljno. Funkcija g je ”na”, pa postoji $b \in B$ tako da $c = g(b)$. Kako je i funkcija f ”na”, postoji $a \in A$ za koje $b = f(a)$. Dakle, za proizvoljno $c \in C$ važi
$$c = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$
za neko $a \in A$, tj. funkcija $g \circ f$ je ”na”.

□

Ukoliko uzmemo zajedno delove 1) i 2) prethodnog tvrđenja, zaključujemo da je kompozicija dve bijekcije ponovo bijekcija.

Tvrđenje 1.4.2. *Neka $f : A \mapsto B$, $g : B \mapsto C$. Tada:*

1. *ako je $g \circ f$ ”na”, tada je g ”na”;*
2. *ako je $g \circ f$ ”1-1”, tada je f ”1-1”.*

Proof.

1. Funkcija $g \circ f$ je ”na”, pa za poizvoljno $c \in C$ postoji $a \in A$ tako da $c = (g \circ f)(a)$. To dalje znači da $c = g(f(a))$ za $a \in A$, odnosno za proizvoljno $c \in C$ postoji $b = f(a) \in B$ tako da $c = g(b)$, tj. g je ”na”.
2. Neka su $a_1, a_2 \in A$ takvi da je $a_1 \neq a_2$. Zbog injektivnosti $g \circ f$ sledi $(g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2)$, odnosno $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$. Odavde sledi $f(a_1) \neq f(a_2)$, odnsono funkcija f je ”1-1”.

□

Dakle, ako je $g \circ f$ bijekcija, onda je f "1-1", a g "na".

Tvrđenje 1.4.3. *Ako je $f : A \mapsto B$ bijekcija, tada postoji jedinstveno preslikavanje $g : B \mapsto A$ tako da*

1. $(\forall a \in A)\ (g \circ f)(a) = a$,
2. $(\forall b \in B)\ (f \circ g)(b) = b$.

Proof. Funkcija f je bijekcija, dakle "na", te $(\forall b \in B)(\exists a \in A)\ b = f(a)$. Kako je f i "1-1", a je jedini element skupa A za koji $b = f(a)$. Definišimo preslikavanje $g : B \mapsto A$ koje ovakvom elementu b dodeljuje element a. Tada važi:

1. $(\forall a \in A)\ (g \circ f)(a) = g(f(a)) = a$,
2. $(\forall b \in B)\ (f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(g(f(a))) = f((g \circ f)(a)) = f(a) = b$.

Dokazali smo egzistenciju preslikavanja g sa traženim osobinama, dokažimo sada jedinstvenost. Pretpostavimo suprotno, da postoji još jedna bijekcija $g_1 : B \mapsto A$ sa traženim osobinama 1) i 2), koja je različita od g. To znači da $(\exists b \in B)\ g(b) \neq g_1(b)$, a kako je f "1-1" preslikavanje, sledi $f(g(b)) \neq f(g_1(b))$, odnosno zbog osobine 2) sledi $b \neq b$, što je kontradikcija. Dakle, preslikavanje g sa traženim osobinama je zaista jedinstveno. □

Preslikavanje g iz prethodnog tvrđenja naziva se **inverzna funkcija** funkcije f, i obično se označava sa f^{-1}. Dakle, $f^{-1} : B \mapsto A$ je bijektivna funkcija za koju važi: $(\forall a \in A)\ (f^{-1} \circ f)(a) = a$ i $(\forall b \in B)\ (f \circ f^{-1})(b) = b$, što se skraćeno zapisuje kao $f^{-1} \circ f = i_A$, $f \circ f^{-1} = i_B$. Slični identičkoj relaciji, **identičku funkciju** definišemo kao $(\forall x \in A)\ i_A(x) = x$.

Znamo da za svaku relaciju postoji jedinstvena njoj inverzna relacija. Kako je svaka funkcija f istovremeno i relacija (sa dodatnim svojstvima), postojaće uvek i f^{-1}, **ali u opštem slučaju kao relacija**. Da bi relacija f^{-1} bila funkcija, f mora da bude bijektivna funkcija. Ako $(x, y) \in \Gamma(f)$, onda $(y, x) \in \Gamma(f^{-1})$, tj. grafici funkcija f i f^{-1} su simetrični u odnosu na pravu $y = x$.

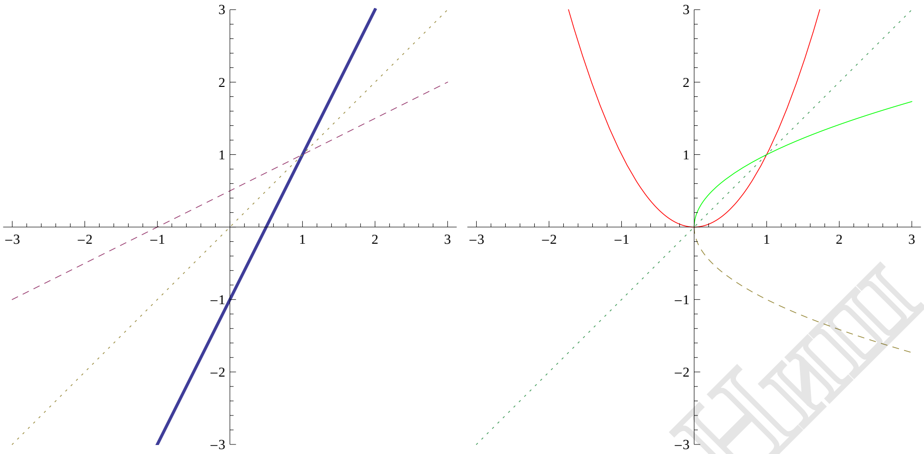
Primer 1.4.4. Potražimo inverznu funkciju funkcije $f(x) = 2x - 1 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Funkcija f je injektivna, jer za proizvoljne $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ važi:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Funkcija f je surjektivna, jer za proizvoljno $y \in \mathbb{R}$ postoji $x = \frac{y+1}{2}$ tako da $f(x) = y$. Prema tome, funkcija f je bijekcija, te zato postoji f^{-1}, koju nalazimo na sledeći način:

$$f^{-1}(f(x)) = x \Leftrightarrow f^{-1}(2x - 1) = x \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}.$$

Dakle, $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$.



Primer 1.4.5. Potražimo inverznu funkciju funkcije $g(x) = x^2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$. Funkcija g nije injektivna, jer $g(-2) = g(2)$ iako $-2 \neq 2$, pa nije ni bijektivna, te ne postoji g^{-1}. Posmatrajmo sada dve restrikcije funkcije g na realne poluose:

$$g_1(x) = x^2 : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+, \quad g_2(x) = x^2 : \mathbb{R}^- \mapsto \mathbb{R}^+.$$

Lako se pokazuje da su funkcije g_1 i g_2 bijekcije, i $g_1^{-1} = \sqrt{x}$, $g_2^{-1} = -\sqrt{x}$. Funkcije g_1^{-1} i g_2^{-1} obično se nazivaju **inverzne grane** funkcije f.

Definicija 1.4.9. *Funkcija $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ je* **strogo rastuća** *ako*

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

odnosno **strogo opadajuća** *ako*

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Primer 1.4.6. Funkcija $f(x) = x$ je strogo rastuća, kao i funkcije $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln x$. Funkcija $f(x) = x^2$ je strogo rastuća na $[0, +\infty)$ a strogo opadajuća na $(-\infty, 0]$. Funkcija $f(x) = \sin x$ je strogo rastuća na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dok je strogo opadajuća na $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

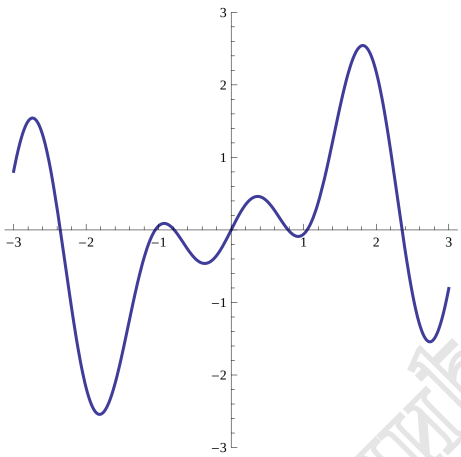
Tvrđenje 1.4.4. *Ako je funkcija $f : X \mapsto Y$ strogo rastuća, onda postoji funkcija $f^{-1} : f(X) \mapsto X$ i strogo je rastuća.*

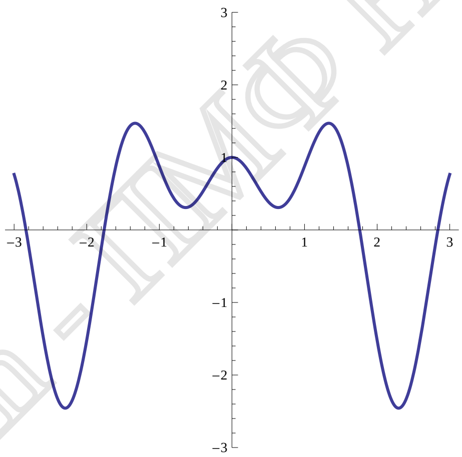
Proof. Funkcija f je strogo rastuća, pa je $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, odakle sledi $f(x_1) \neq f(x_2)$, tj. funkcija f je "1-1". Funkcija f je "na" ako slika X u $f(X)$, pa postoji bijekcija $f^{-1} : f(X) \mapsto X$. Dokažimo da je f^{-1} strogo rastuća funkcija.

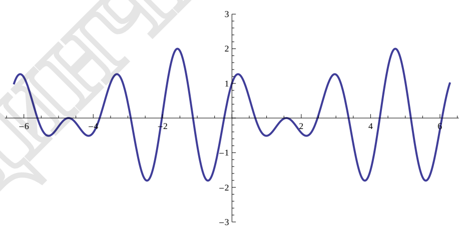
Neka su $y_1, y_2 \in f(X)$ takvi da $y_1 < y_2$. Moguća su tri slučaja: $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$, $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$ ili $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Prvi i drugi slučaj nisu mogući, jer bi onda primenom funkcije f imali $y_1 = y_2$ odnosno $y_1 > y_2$, što dovodi do kontradikcije. Dakle, mora biti $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, tj. funkcija f^{-1} je strogo rastuća. $\square$

Definicija 1.4.10. *Funkcija* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *je*

1. **parna**, *ako* $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = f(-x)$;
2. **neparna**, *ako* $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = -f(-x)$;
3. **periodična**, *ako* $(\exists T \neq 0)(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x+T) = f(x)$. *Broj* T *za koji ovo važi naziva se* **period** *funkcije* f. *Najmanji pozitivan period funkcije, ako postoji, naziva se* **osnovni period**.







Funkcija ne mora da bude ni parna ni neparna, međutim ukoliko jeste, onda imamo izvesnih olakšica. Grafik parne funkcije simetričan je u odnosu na $y-$osu, dok je grafik neparne funkcije simetričan u odnosu na koordinatni početak. Parnost i neparnost podrazumevaju da je domen funkcije f simetričan skup u odnosu na koordinatni početak, tj. $x \in \mathcal{D}(f) \Leftrightarrow -x \in \mathcal{D}(f)$. Grafik periodične funkcije f sa osnovnim periodom T dobija se kada proizvoljno "parče" grafika dužine T transliramo duž $x-$ose za $\pm T, \pm 2T, \pm 3T, \ldots$ Dakle, često je dovoljno ispitati funkciju samo na delu domena da bismo dobili informacije o njenom ponašanju na celom domenu.

Primer 1.4.7. Funkcije $f(x) = x^{2n}, n \in \mathbb{N}$, su parne, funkcije $f(x) = x^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$, su neparne. Funkcije e^x i $\ln x$ nisu ni parne ni neparne. Funkcija $f(x) = \sin x$ je neparna i periodična; njeni periodi su $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, dok je njen osnovni period 2π. Funkcija $f(x) = \cos x$ je parna i periodična sa osnovnim periodom 2π.

Ukoliko neparna funkcija ima inverznu funkciju, onda je i inverzna funkcija neparna. Zaista, ako je $f : A \mapsto B$ neparna bijekcija, onda za proizvoljno $y \in B$ postoji jedinstveno $x \in A$ tako da $y = f(x)$. Zato:

$$f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y).$$

Permutacione funkcije

Posmatrajmo sve moguće bijekcije skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ na sebe, tj. skup

$$S_n = \{f : \{1, 2, \ldots, n\} \xrightarrow[\text{"na"}]{\text{"1-1"}} \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Elementi ovog skupa su **permutacije** i ima ih ukupno $n!$ Proizvoljnu permutaciju predstavljaćemo na sledeći način:

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}.$$

Posmatrajmo permutacije skupa $\{1, 2, 3, 4\}$. Za datu permutaciju s definišemo permutaciju s^{-1} na sledeći način: ako $s(i) = j$, onda $s(j) = i$, gde $i, j = \overline{1, n}$. Na primer,

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad s^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Među permutacijama iz skupa S_n može se definisati kompozicija permutacija na sledeći način: ako $(s_1 \circ s_2)(i) = s_2(s_1(i)), i = \overline{1, n}$. Ilustrujmo kompoziciju na skupu S_3:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \; s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \; s_1 \circ s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Među svim permutacijama iz S_n posebnu ulogu igra permutacija pri kojoj svi elementi ostaju na svojim mestima, tj.

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

pošto za svaku permutaciju $s \in S_n$ važi: $s \circ \Delta_n = \Delta_n \circ s = s$.

1.5 Ekvivalentnost skupova i kardinalnost

Definicija 1.5.1. *Skupovi X i Y su* **ekvivalentni**, *u oznaci $X \sim Y$, ako postoji bijektivno preslikavanje skupa X na skup Y. Za dva ekvivalentna skupa X i Y kaže se da imaju isti* **kardinalni broj**, *$card(X) = card(Y)$.*

Kardinalni broj predstavlja uopštenje klasičnog pojma broja elemenata skupa. Reći da neki skup X ima n elementa značilo bi da mi možemo te elemente nabrojati, a samo brojanje je uspostavljanje bijekcije između podskupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ skupa $\mathbb{N}$ i samog skupa X. Ovo je intuitivno jasno, ali nepodesno za rad sa beskonačnim skupovima, kao što pokazuje naredni primer.

Primer 1.5.1. Skupovi $\mathbb{N}$ i $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \ldots\}$ su ekvivalentni, jer postoji bijektivno preslikavanje $f(n) = 2n : \mathbb{N} \mapsto 2\mathbb{N}$. Ovo je u suprotnosti sa intuitivnim shvatanjem broja elemenata skupa, jer se tvrdi da parnih i prirodnih brojeva ima podjednako mnogo, a mi znamo da pored parnih brojeva ima i neparnih. Dakle, $2\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{N}$, ali $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$.

Relacija ekvivalentnosti dva skupa je relacija ekvivalencije. Svaka klasa ekvivalencije sastoji se od skupova koji imaju isti kardinalni broj.

Ukoliko skupovi X i Y nisu ekvivalentni i postoji bijekcija skupa X na pravi podskup skupa Y, tada je $card(X) < card(Y)$.

Definicija 1.5.2. *Skup je* **beskonačan** *ako je ekvivalentan sa nekim svojim pravim podskupom, u suprotnom je* **konačan**. *Beskonačni skupovi koji su ekvivalentni skupu prirodnih brojeva su* **prebrojivi**, *dok su u suprotnom* **neprebrojivi**. *Za kardinalni broj skupa $\mathbb{N}$ koristi se oznaka $\aleph_0$ ("alef-nula", po prvom slovu hebrejskog alfabeta).*

Primer 1.5.2. Kao što smo već videli, skup $\mathbb{N}$ je beskonačan pošto je ekvivalentan sa svojim pravim podskupom $2\mathbb{N}$. Segment $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ je beskonačan, jer je ekvivalentan sa segmentom $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ za proizvoljne međusobno različite $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; ta ekvivalencija ostvaruje se bijekcijom $f(x) = (\beta - \alpha)x + \alpha$. Skup $(0, 1)$ je ekvivalentan sa $\mathbb{R}$, i ta ekvivalencija ostvaruje se bijekcijom:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{x}, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1-x} - 2, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases} .$$

Kako kod beskonačnog skupa dva elementa ne menjaju ništa po pitanju kardinalnosti, imamo $card(0, 1) = card([0, 1]) = card(\mathbb{R})$.

Unija konačnog ili prebrojivo beskonačnog skupa prebrojivih skupova je prebrojiv skup. Zaista, ako su $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$ i $B = \{b_1, b_2, \cdots\}$ dva beskonačna skupa, napisaćemo njihovu uniju kao $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots\}$, odakle vidimo da je taj skup prebrojiv. Ova skica dokaza lako se uopštava za konačno mnogo skupova, dok dokaz za beskonačno mnogo skupova navodimo u narednom tvrđenju za specijalni slučaj skupa $\mathbb{Q}$, koji se može posmatrati kao prebrojiv skup prebrojivih skupova oblika $\{k/n : n \in \mathbb{N}\}$.

Tvrđenje 1.5.1. *Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je prebrojiv.*

Proof. Poređajmo sve pozitivne racionalne brojeve na sledeći način:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \dots \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Sada "skupljamo" elemente iz tablice na sledeći način: polazi se od gornjeg levog ugla, ide jedan korak naniže, onda dijagonalno u smeru gore-desno dokle je to moguće, onda jedan korak desno, onda ponovo dijagonalno ali u smeru dole-levo dok je moguće itd. Na ovaj način napravili smo niz:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \dots$$

Nijedan pozitivan racionalan broj nije izostavljen, a brojeve koji se pojavljuju više puta izbacujemo (to su brojevi oblika $\frac{m}{n}$ gde m i n nisu uzajamno prosti), što znači da smo konstruisali bijekciju između $\mathbb{Q}^+$ i $\mathbb{N}$. Prema tome,

$$card(\mathbb{Q}) = card(\mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+) = card(\mathbb{N}),$$

pošto je unija prebrojivih skupova prebrojiv skup. □

Tvrđenje 1.5.2. *Skup $[0,1]$ je neprebrojiv.*

Proof. Pretpostavimo suprotno, da je skup svih realnih brojeva između 0 i 1 prebrojiv. Tada se oni mogu poređati u niz:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0, c_{11}c_{12}c_{13}\dots \\ r_2 &= 0, c_{21}c_{22}c_{23}\dots \\ r_3 &= 0, c_{31}c_{32}c_{33}\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

gde su $c_{ij} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ cifre. Formirajmo novi realan broj r od brojeva iz niza $r_1, r_2, r_3, \dots$ na sledeći način:

$$r = 0, c_1c_2c_3\dots,$$

gde su cifre date sa

$$c_i = \begin{cases} 4, & d_{ii} \neq 4 \\ 5, & d_{ii} = 4 \end{cases}.$$

Ovako dobijeni broj r pripada $[0,1]$, ali se po konstrukciji ne nalazi na listi brojeva iz $[0,1]$. Dobili smo kontradikciju, te skup $[0,1]$ nije prebrojiv.

Da bismo pojasnili konstrukciju iz dokaza, ako su dati brojevi:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,\mathbf{2}3794102\ldots \\ r_2 &= 0,4\mathbf{4}590138\ldots \\ r_3 &= 0,09\mathbf{1}18764\ldots \\ r_4 &= 0,805\mathbf{5}3900\ldots \\ &\ldots \end{aligned}$$

broj r će biti $r = 0,4544\ldots$

Svaki realan broj ima jedinstven decimalni zapis (osim brojeva koji se završavaju beskonačnim nizom cifara 9). Zato broj r nije jednak nijednom $r_1, r_2, \ldots$ jer se decimalni zapis broja r razlikuje od zapisa broja r_i barem na $i-$tom mestu, za sve $i \in \mathbb{N}$. $\square$

Kardinalni broj skupa $[0,1]$, a samim tim i skupa $\mathbb{R}$, obeležava se sa c i naziva **konitnuum**. Dakle,

$$card(\mathbb{N}) = \aleph_0, \; card(\mathbb{R}) = c.$$

Između ova dva kardinalna broja, po tzv. **kontinuum hipotezi** važi relacija $c = 2^{\aleph}_0$. Ona se može, po analogiji sa konačnim skupovima, tumačiti kao da realnih brojeva ima onoliko koliko ima podskupova skupa prirodnih brojeva. Ne postoji skup koji ima najveću kardinalnost.

1.6 Algebarske strukture

Definicija 1.6.1. *Neka je $X \neq \emptyset$ i $n \in \mathbb{N}$. Preslikavanje $f : X^n \mapsto X$ naziva se* **operacija dužine** *n u skupu X ili $n-$arna operacija.*

Dakle, operacija predstavlja preslikavanje koje uređenu $n-$torku elemenata skupa X slika ponovo u element skupa X:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x \in X.$$

Za $n = 1$ koristi se termin **unarna operacija**, a za $n = 2$ **binarna operacija**. Operacije ćemo najčešće označavati simbolima $+, -, \cdot$ (za uobičajene operacije) ili $\circ, \oplus, *, \ldots$ (kad se radi sa operacijama definisanim na određeni način), kako ne bi došlo do zabune.

Primer 1.6.1. Navešćemo neke operacije:

1. Neka je $X = \mathbb{R}$ i neka je data operacija $f(x) = -x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Ovo je primer unarne operacije na skupu realnih brojeva koja nam je poznata kao promena znaka. Operacija komplementiranja na datom partitivnom skupu je takođe unarna operacija, kao i operacija $f(n) = n^2 : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ definisana na skupu prirodnih brojeva.

2. Primeri binarnih operacija su sabiranje, oduzimanje i množenje realnih brojeva.

3. Preslikavanje $g(m, n) = m - n$ definisano na skupu $\mathbb{N}$ nije (binarna) operacija, jer rezultat ne mora da bude prirodan broj. Dakle, ovako definisano g nije operacija na $\mathbb{N}$. Lako se vidi da g jeste operacija na skupu $\mathbb{Z}$.

Binarne operacije na konačnim skupovima mogu biti zadate (ili predstavljene) Kejlijevim[8] tablicama. Na primer, na skupu $X = \{a, b, c, d\}$ može se definisati binarna operacija $*$ na sledeći način:

$*$	a	b	c	d
a	b	c	a	d
b	c	a	a	b
c	b	d	b	c
d	c	a	c	b

Ova tablica se koristi na sličan način kao tablica množenja: rezultat primene operacije $*$ na npr. b i d nalazimo u tablici preseku vrste gde se nalazi b i kolone gde je d - dakle, $b * d = b$. Iz Kejlijeve tablice često je moguće na jednostavan način dobiti informacije o osobinama same operacije.

Definicija 1.6.2. *Skup X na kome je definisana binarna operacija $*$ naziva se* **grupoid**.

Primeri grupoida: $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot)$.

Definicija 1.6.3. *Binarna operacija $*$ definisana na skupu X je*

1. **komutativna** *ako* $(\forall x, y \in X)\ x * y = y * x$;

2. **asocijativna** *ako* $(\forall x, y, z \in X)\ x * (y * z) = (x * y) * z$.

[8]Arthur Cayley (1821–1895), britanski matematičar

Sabiranje u množenje prirodnih brojeva su binarne operacije koje su komutativne i asocijativne. Međutim, operacija $m * n = m^n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ nije ni komutativna (jer $2^3 \neq 3^2$) ni asocijativna (pošto $2^{81} = 2^{3^4} \neq (2^3)^4 = 2^{12}$). Komutativnost se u Kejlijevoj tablici ispoljava kao simetričnost tablice u odnosu na glavnu dijagonalu. Za asocijativnost postoji tzv. Light-ov kriterijum koji neće biti obrađivan u ovom kursu.

Binarne operacije koje se obeležavaju sa "+" su **aditivne**, a sa "·" su **multiplikativne**.

Definicija 1.6.4. *Neka je $(X, *)$ grupoid. Ako postoji element $e \in X$ takav da*

$$(\forall x \in X)\ e * x = x * e = x,$$

tada se on naziva **neutralni element** *ili* **neutral**. *Ukoliko važi samo $e * x = x$ (odnosno $x * e = x$), e je* **levi** *(***desni***)* **neutral**.

Ako je reč o aditivnoj operaciji koristi se termin "nula", pošto je 0 neutral za sabiranje prirodnih brojeva; ako je u pitanju multiplikativna operacija koristi se termin "jedinica", jer je 1 neutral za množenje prirodnih brojeva.

Tvrđenje 1.6.1. *Ako postoji, neutralni element je jedinstven.*

Proof. Pretpostavimo da u $(X, *)$ postoje dva neutrala, e i e'. Po definiciji, imamo: $e = e * e' = e'$, dakle - neutral je jedinstven. □

Definicija 1.6.5. *Element a grupoida $(X, *)$ je* **levo regularan** *ako*

$$(\forall x, y \in X)\ a * x = a * y \Rightarrow x = y.$$

Analogno se definiše desno regularan element. Element je **regularan** *ako je i levo i desno regularan.*

Na primer, 0 nije regularna u $(\mathbb{N} \cup \{0\}, \cdot)$ jer npr. $0 \cdot 1 = 0 \cdot 2$ ali $1 \neq 2$.

Definicija 1.6.6. *Neka je $(X, *)$ grupoid sa neutralom e. Element $x \in X$ je* **invertibilan** *ukoliko postoji element x' takav da*

$$x * x' = x' * x = e.$$

Takav element x' naziva se **inverz** *elementa x i obično označava sa x^{-1}. Ukoliko važi samo $x * x' = e$ (odnosno $x' * x = e$), tada je x'* **desni** *(odnosno* **levi***)* **inverz** *elementa x.*

U aditivnoj grupi koristi se termin **suprotni element**, u oznaci $-x$; a multiplikativnoj se naziva i **recipročni element**, u oznaci $\frac{1}{x}$.

Primer 1.6.2.
1. U $(\mathbb{Z}, +)$ za svako $z \in \mathbb{Z}$ postoji element $-z$ takav da $z + (-z) = 0$. U $(\mathbb{N}, +)$ to nije slučaj.

2. U grupoidu $(\mathbb{R}, \cdot)$ za element 0 ne postoji x takvo da $0 \cdot x = x \cdot 0 = 1$. Međutim, u grupoidu $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ za svaki element x postoji x' takav da $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$, i to je baš $x' = \frac{1}{x}$.

Tvrđenje 1.6.2. *Neka je $*$ asocijativna operacija na grupoidu $(X, *)$. Ako za element x postoji inverzni element, tada je on jedinstven, a element x je regularan.*

Proof. Dokažimo prvo jedinstvenost. Neka su x' i x'' dva inverza elementa x, tj. neka $x * x' = x' * x = e, \quad x * x'' = x'' * x = e$. Imamo:

$$x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x'',$$

čime smo dokazali jedinstvenost inverza.

Dokažimo sada regularnost.

$$\begin{aligned} x * y = x * z \quad &\Rightarrow \quad x^{-1} * (x * y) = x^{-1} * (x * z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad (x^{-1} * x) * y = (x^{-1} * x) * z \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad e * y = e * z \Rightarrow y = z. \end{aligned}$$

Dokazali smo levu regularnost, analogno se pokazuje i desna. □

Definicija 1.6.7. *Asocijativni grupoid je* **polugrupa**. *Ukoliko polugrupa ima neutral, naziva se* **monoid**.

Na primer, $(\mathbb{N}, +)$ je polugrupa, a $(\mathbb{N}, \cdot)$ monoid, jer sadrži neutral 1.

Definicija 1.6.8. *Grupoid $(X, *)$ u kome jednačine $a * x = b$ i $y * a = b$ imaju jedinstveno rešenje (po x i y) naziva se* **kvazigrupa**.

Konačan grupoid je kvazigrupa akko se svaki element pojavljuje tačno jednom u svakoj vrsti i koloni njegove tablice. Takva tablica naziva se **latinski kvadrat**. Primer:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	d	c	a	b
c	b	a	d	c
d	c	d	b	a

Definicija 1.6.9. *Polugrupa $(X,*)$ sa neutralom e u kojoj svaki element ima inverz naziva se* **grupa**. *Ako je operacija $*$ komutativna, onda je $(X,*)$* **Abelova**[9] **grupa**.

Drugim rečima, grupoid $(X,*)$ sa osobinama

1. $(\forall x, y, z \in Z)\ x*(y*z) = (x*y)*z$;

2. $(\exists e \in X)(\forall x \in X)\ x*e = e*x = x$;

3. $(\forall x \in X)(\exists x^{-1} \in X)\ x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$;

je grupa.

Primer 1.6.3.

1. Grupoid $(\mathbb{Z},+)$ je Abelova grupa sa neutralom 0 gde je inverz elementa $n \in \mathbb{Z}$ element $-n$; $(\mathbb{Q}\backslash\{0\},\cdot)$ je Abelova grupa sa neutralom 1, gde svaki racionalni broj $\frac{p}{q}$ ima inverz $\frac{q}{p}$.

2. Primer trivijalne grupe: $(\{a\},*)$ gde je operacija data sa $a*a=a$.

3. Grupoid $(\mathbb{Z}_n,+_n)$, gde je $\mathbb{Z}_n = \{0,1,\ldots,n-1\}$ je Abelova grupa. Neutral je 0, a inverzni element za $k \in \mathbb{Z}_n$ je $n-k$ ako $k \neq 0$, odnosno 0 za $k=0$.

4. Grupoid zadat tablicom:

$*$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

   je Abelova grupa. Zaista, neutralni element je c, a inverzi elemenata a,b,c su redom b,a,c. Komutativnost se vidi iz tablice, dok za asocijativnost je potrebno izlistati sve kombinacije.

5. Posmatrajmo jednakostranični trougao ABC. Obeležimo sa ρ_1 rotaciju ovog trougla u ravni kojoj pripada oko centra O za ugao $\frac{2\pi}{3}$, a sa ρ_2 rotaciju za ugao $\frac{4\pi}{3}$. Neka je σ_1 osna simetrija trougla u odnosu na pravu OA, σ_2 simetrija u odnosu na BO, σ_3 u odnosu na CO, i neka je id identičko preslikavanje. Dobili smo skup

$$X = \{id, \rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

[9] Niels Henrik Abel (1802–1829), norveški matematičar

koji čine transformacije koje ne menjaju trougao ABC. Lako se pokazuje da je kompozicija dve transformacije iz skupa X ponovo element skupa X. Struktura $(X, \circ)$ je nekomutativna grupa čija je tablica:

$\circ$	id	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	σ_3
id	id	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	id	σ_2	σ_3	σ_1
ρ_2	ρ_2	id	ρ_1	σ_3	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_3	σ_2	id	ρ_2	ρ_1
σ_2	σ_2	σ_1	σ_3	ρ_1	id	ρ_2
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	ρ_2	ρ_1	id

Tvrđenje 1.6.3. *Svaki element grupe je regularan.*

Proof. Neka je $(X, *)$ grupa i $a, b, x \in X$ proizvoljni.

$$\begin{aligned} a * x = b * x \quad &\Rightarrow \quad (a * x) * x^{-1} = (b * x) * x^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad a * (x * x^{-1}) = b * (x * x^{-1}) \Rightarrow a * e = b * e \Rightarrow a = b. \end{aligned}$$

Analogno se dokazuje i leva regularnost. □

Tvrđenje 1.6.4. *Za invertibilne elemente u grupi važi*

$$(\forall a, b \in X)\ (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}.$$

Proof.

$$\begin{aligned} (a * b)^{-1} * (a * b) = e \quad &\Rightarrow \quad ((a * b)^{-1} * (a * b)) * b^{-1} = e * b^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad (a * b)^{-1} * ((a * b) * b^{-1}) = b^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad (a * b)^{-1} * (a * (b * b^{-1})) = b^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad (a * b)^{-1} * a = b^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad ((a * b)^{-1} * a) * a^{-1} = b^{-1} * a^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad (a * b)^{-1} * (a * a^{-1}) = b^{-1} * a^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad (a * b)^{-1} * e = b^{-1} * a^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} \end{aligned}$$

□

Tvrđenje 1.6.5. *U grupi $(X, *)$ jednačine*

$$a * x = b, \quad y * a = b$$

imaju jedinstvena rešenja

$$x = a^{-1} * b, \quad y = b * a^{-1}$$

za sve $a, b \in X$.

Proof. Pokažimo da je $x = a^{-1} * b$ rešenje jednačine $a * x = b$. Imamo

$$a * x = a * (a^{-1} * b) = (a * a^{-1}) * b = e * b = b.$$

Ostaje da se dokaže jedinstvenost. Pretpostavimo da postoji još jedno rešenje $x_1 \neq a^{-1} * b = x$. Tada

$$a * x_1 = b \wedge a * x = b \Rightarrow a * x_1 = a * x \Rightarrow x_1 = x,$$

što je kontradikcija. Analogno se dokazuje za drugu jednačinu. □

1.6.1 Homomorfizmi i izomorfizmi

Definicija 1.6.10. *Neka su* $(X_1, \circ)$ *i* $(X_2, *)$ *grupoidi. Preslikavanje* $f : X_1 \mapsto X_2$ *takvo da*

$$(\forall x, y \in X_1)\ f(x \circ y) = f(x) * f(y),$$

naziva se **homomorfizam** *grupoida* $(X_1, \circ)$ *u grupoid* $(X_2, *)$.

Ako je homomorfizam "1-1" naziva se **monomorfizam**. Ako je "na" onda je **epimorfizam**, tada je X_2 **homomorfna slika** grupoida X_1. Bijektivni homomorfizam naziva se **izomorfizam**. Strukture koje su izomorfne su u algebarskom smislu iste. Ako je $X_1 = X_2$, u pitanju je **automorfizam**.

Na primer, preslikavanje $f(n) = 2^n$ grupoida $(\mathbb{N}, +)$ u grupoid $(\mathbb{N}, \cdot)$ je homomorfizam jer $(\forall m, n \in \mathbb{N})\ f(n + m) = 2^{n+m} = 2^n \cdot 2^m = f(n) \cdot f(m)$.

Tvrđenje 1.6.6. *Ako je* $f : X_1 \mapsto X_2$ *izomorfizam i ako postoji neutral* $e_1 \in X_1$, *tada postoji neutral* $e_2 \in X_2$ *takav da* $e_2 = f(e_1)$.

Proof. Pošto $(\forall y \in X_2)(\exists x \in X_1)\ y = f(x)$, onda je

$$y * e_2 = y * f(e_1) = f(x) * f(e_1) = f(x \circ e_1) = f(x) = y.$$

Slično se dokazuje i $e_2 * y = y$. □

Tvrđenje 1.6.7. *Ako je* f *izomorfizam* X_1 *na* X_2, *onda je* f^{-1} *takođe izomorfizam* X_2 *na* X_1.

Proof. Neka su $y_1, y_2 \in X_2$, tada postoje $x_1, x_2 \in X_1$ tako da $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Sada

$$f^{-1}(y_1 * y_2) = f^{-1}(f(x_1) * f(x_2)) = f^{-1}(f(x_1 \circ x_2)) = x_1 \circ x_2 = f^{-1}(y_1) \circ f^{-1}(y_2).$$

□

1.6.2 Algebarske strukture sa dve operacije

Definicija 1.6.11. *Neka su na skupu $X \neq \emptyset$ definisane dve binarne operacije, označene sa $\circ$ and $*$. Ako*

$$(\forall x, y, z \in X)\ x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z),$$

tada važi **levi distributivni zakon $\circ$ prema $*$**. *Ukoliko*

$$(\forall x, y, z \in X)\ (x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z),$$

tada važi **desni distributivni zakon $\circ$ prema $*$**. *Ukoliko važe i levi i desni distributivni zakon, tada se kaže da važi* **distributivni zakon $\circ$ prema $*$**.

Na primer, za skup $\mathbb{R}$ i uobičajene operacije sabiranja i množenja važi:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z), \quad (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z),$$

ali $5 + (3 \cdot 4) \neq (5 + 3) \cdot (5 + 4)$.

Definicija 1.6.12. *Neka su na skupu $X \neq \emptyset$ definisane dve binarne operacije: jedna aditivna koju ćemo označavati sa $+$, i druga multiplikativna koju ćemo označavati sa $\cdot$. Ako je:*

1. *$(X, +)$ Abelova grupa,*
2. *$(X, \cdot)$ polugrupa,*
3. *važi distributivni zakon $\cdot$ prema $+$,*

tada se struktura $(X, +, \cdot)$ naziva **prsten**.

Napomena: Nekad se prsten definiše tako što se zahteva samo da $(X, \cdot)$ bude grupoid; ako je $(X, \cdot)$ polugupa onda je u pitanju asocijativni prsten.

U zavisnosti od osobina polugrupe $(X, \cdot)$, prsten je:

1. **komutativan**, ako je $(X, \cdot)$ komutativna polugrupa,
2. **sa jedinicom**, ako je $(X, \cdot)$ monoid.

Primer 1.6.4.
1. Struktura $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je komutativni prsten sa jedinicom jer je $(\mathbb{Z}, +)$ Abelova grupa sa neutralom 0, $(\mathbb{Z}, \cdot)$ je komutativna polugrupa sa jedinicom 1, i važi distributivni zakon $\cdot$ prema $+$.
2. Racionalni i realni brojevi sa uobičajenim sabiranjem i množenjem su komutativni prsteni sa jedinicom.

3. Neka je $X = \mathcal{P}$ skup svih polinoma sa realnim koeficijentima. Sabiranje polinoma je komutativno i asocijativno, nula-polinom je neutral, a inverzni element je suprotni polinom - dakle, $(\mathcal{P}, +)$ je Abelova grupa. Množenje polinoma je komutativno i asocijativno, neutral je konstantni polinom 1, a pošto važi i distributivni zakon, sledi da je $(\mathcal{P}, +, \cdot)$ prsten.

4. Najmanji mogući netrivijalni prsten je $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$, gde je $\mathbb{Z}_2$ skup koji se sastoji od dva elementa 0 i 1, neutrala za sabiranje i množenje. Zapravo, $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ je prsten za svaki prirodan broj n, gde su sabiranje i množenje su definisani na sledeći način:

$$x +_n y = (x + y) \mod n, \quad x \cdot_n y = (x \cdot y) \mod n.$$

Definicija 1.6.13. *Prsten $(X, +, \cdot)$ takav da je $(X \setminus \{0\}, \cdot)$ grupa (gde je 0 neutralni element za operaciju +) naziva se* **telo**.

Definicija 1.6.14. *Komutativno telo je* **polje**.

Dakle, algebarska struktura $(X, +, \cdot)$ je polje ako važi:

- $(\forall x, y, z \in X)\ x + (y + z) = (x + y) + z,$
- $(\forall x \in X)(\exists 0 \in X)\ x + 0 = 0 + x = x,$
- $(\forall x \in X)(\exists -x \in X)\ x + (-x) = (-x) + x = 0,$
- $(\forall x, y \in X)\ x + y = y + x,$
- $(\forall x, y, z \in X)\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$
- $(\forall x, y, z, \in X)\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z;\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z,$
- $(\forall x \in X)(\exists 1 \in X)\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x,$
- $(\forall x \in X \setminus \{0\})(\exists \frac{1}{x} \in X)\ x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1,$
- $(\forall x, y \in X)\ x \cdot y = y \cdot x.$

Primer 1.6.5.

1. Prsten $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nije telo (dakle, ni polje) zato što struktura $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ nije grupa - problem je što ni za jedan ceo broj osim ± 1 ne postoji inverz.

2. Prsten $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je polje, zato što je $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ Abelova grupa. Polje je i struktura $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

3. Prsten realnih polinoma nije polje, jer samo nenula konstantni polinomi imaju inverz.

4. Struktura $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ je polje akko je broj p prost, inače je samo prsten.

Tvrđenje 1.6.8. *Neka je $(X, +, \cdot)$ prsten. Tada*

$$(\forall x \in X)\ x \cdot 0 = 0 \cdot x = x,$$

gde je 0 neutral za operaciju $+$.

Proof. Kako je $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, imamo:

$$(x \cdot 0) + (-(x \cdot 0)) = (x \cdot 0) + (x \cdot 0) + (-(x \cdot 0)),$$

odnosno: $0 = x \cdot 0 + (x \cdot 0 + (-(x \cdot 0))) = x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0$. □

Tvrđenje 1.6.9. *Neka je $(X, +, \cdot)$ prsten. Za proizvoljne $x, y \in X$ važi:*

$$(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y), \quad (-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$$

Proof. Važi $x \cdot y + (-x) \cdot y = (x + (-x)) \cdot y = 0 \cdot y = 0 \Rightarrow (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$, kao i $x \cdot y + x \cdot (-y) = x \cdot (y + (-y)) = x \cdot 0 = 0 \Rightarrow x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$. Sada imamo $(-x) \cdot (-y) = -(x \cdot (-y)) = -(-(x \cdot y)) = x \cdot y$. □

Definicija 1.6.15. *Neka je $(X, +, \cdot)$ prsten. Ako za $x, y \in X$ važi*

$$x \cdot y = 0, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0,$$

tada su a i b **delitelji nule**.

Primer 1.6.6. Posmatrajmo prsten $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$. U njemu važi $2 \cdot_6 3 = 0$ iako $2 \neq 0$ i $3 \neq 0$. Dakle, elementi 2 i 3 su delitelji nule.

1.7 Polje realnih brojeva

Definicija 1.7.1. *Polje $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ naziva se* **polje realnih brojeva** *ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

1. *u skupu $\mathbb{R}$ definisana je relacija totalnog poretka koja ima dve osobine:*
   - $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
   - $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ 0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$;
2. *svaki neprazan odozgo ograničen podskup skupa realnih brojeva ima supremum (***aksioma supremuma***)*

Svako drugo polje koje poseduje ove osobine izomorfno je sa poljem realnih brojeva.

Terminologija u polju realnih brojeva:

- operacije $+$ i $\cdot$ se nazivaju redom **sabiranje** i **množenje**
- neutral grupe $(\mathbb{R},+)$ naziva se **nula**, u oznaci 0; inverzni element za x je **suprotni element**, u oznaci $-x$
- neutral grupe $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ naziva se **jedan**, u oznaci 1; inverzni element za x je **recipročni element**, u oznaci $\frac{1}{x}$ ili x^{-1}
- zbir $y+(-x)$ je **razlika** elemenata y i x, u oznaci $y-x$
- proizvod $y\cdot\frac{1}{x}$ (svakako, $x\neq 0$) je **količnik** elemenata y i x, u oznaci $\frac{y}{x}$
- ako $x\leq y$ onda je x **manje ili jednako** y; ako $x\leq y\wedge x\neq y$ onda $x<y$, x **je manje od** y.

Tvrđenje 1.7.1. *Neke posledice aksioma polja:*

1. *Jednačina* $a+x=b$ *ima jedinstveno rešenje* $x=b-a$*;*
2. *jednačina* $a\cdot x=b$ *ima jedinstveno rešenje* $x=\frac{b}{a}$ *ukoliko* $a\neq 0$*;*
3. $(\forall x\in\mathbb{R})\ 0\cdot x=x\cdot 0=0$*;*
4. $x\cdot y=0\wedge x\neq 0\Rightarrow y=0$*;*
5. *za inverz od* $x\cdot y$ *važi* $\frac{1}{x\cdot y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}$*;*
6. $\frac{x}{u}+\frac{y}{v}=\frac{xv+yu}{uv},\quad u,v\neq 0.$

Proof. Deo 4. je zbog tautologije $(p\Rightarrow q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge\neg q\Rightarrow r)$ ekvivalentan sa $x\cdot y=0\Rightarrow x=0\vee y=0$. Ostale osobine se lako dokazuju. □

Tvrđenje 1.7.2. *Neke posledice aksiome uređenosti polja:*

1. $x\leq y\Leftrightarrow 0\leq y-x\Leftrightarrow -y\leq -x\Leftrightarrow x-y\leq 0$*;*
2. $(\forall x\in\mathbb{R})\ x^2\geq 0$*;*
3. $x\leq y\wedge z\geq 0\Rightarrow xz\leq yz$*;*
4. $x\leq y\wedge z\leq 0\Rightarrow xz\geq yz$*.*

Proof. 1.

$$
\begin{aligned}
&x \le y \Rightarrow x + (-x) \le y + (-x) \Rightarrow 0 \le y - x,\\
&0 \le y - x \Rightarrow 0 + (-y) \le y - x + (-y) \Rightarrow -y \le -x,\\
&-y \le -x \Rightarrow x - y \le x - x \Rightarrow x - y \le 0,\\
&x - y \le 0 \Rightarrow x - y + y \le 0 + y \Rightarrow x \le y.
\end{aligned}
$$

2. Na osnovu aksiome 1.b) za $x = y$ sledi $0 \le x^2$.

3. Na osnovu iste aksiome kao pod 2), sledi

   $$x \le y \wedge 0 \le z \Leftrightarrow 0 \le y - x \wedge 0 \le z \Rightarrow 0 \le (y-x)z = yz - xz \Leftrightarrow xz \le yz.$$

4. Analogno pod 3).

□

U skupu realnih brojeva može se rekurzivno uvesti stepenovanje realnog broja celim eksponentom.

Definicija 1.7.2. *Za svako $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ definišemo:*

1. $x^0 = 1$,

2. $x^{n-1} \cdot x = x^n$,

3. $\frac{1}{x^n} = x^{-n}, x \neq 0$.

Broj x^n zove se **stepen broja x sa celim izložiocem** *n.*

Tvrđenje 1.7.3. *Za sve $m, n \in \mathbb{Z}$ i $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ važi:*

1. $x^n x^m = x^{n+m}$,

2. $(x^n)^m = x^{nm}$,

3. $x^n y^n = (xy)^n$.

Proof. Dokažimo 1. Ako $m, n \in \mathbb{N}$, tvrđenje sledi po definiciji stepena. Neka sada $n > 0, m = -p < 0$ pri čemu je $p \le n$. Tada:

$$x^n x^m = x^n x^{-p} = x^{n-p} x^p \frac{1}{x^p} = x^{n-p} = x^{n+m}.$$

Ako $p > n$ onda je

$$x^n x^m = x^n \frac{1}{x^p} = x^n \frac{1}{x^n x^{p-n}} = x^n \frac{1}{x^n} \frac{1}{x^{p-n}} = x^{-(p-n)} = x^{-p+n} = x^{m+n}.$$

Ako $m = -p < 0$ i $n = -q < 0$ sledi

$$x^n x^m = \frac{1}{x^p} \frac{1}{x^q} = \frac{1}{x^{p+q}} = x^{-(p+q)} = x^{-p-q} = x^{n+m}.$$

Slično se dokazuju osobine 2 i 3. □

1.7.1 Važniji podskupovi skupa realnih brojeva

Prirodni brojevi

Aksiomatsko određivanje skupa prirodnih brojeva dali su Dedekind[10] 1888. i Peano[11] 1891. Navešćemo opisnu verziju Peanovih aksioma:

1. 1 je prirodan broj;
2. sledbenik ma kog prirodnog broja je prirodan broj;
3. 1 nije sledbenik nijednog prirodnog broja;
4. svaki prirodan broj je sledbenik najvise jednog prirodnog broja;
5. **Aksioma indukcije:** Ako skup S zadovoljava uslove:
   - $1 \in S$,
   - sa svakim članom sadrži i njegovog sledbenika,

   tada S sadrži sve prirodne brojeve.

Osnovni pojmovi koji se koriste su: prirodan broj, broj 1, skup i apostrof za označavanje sledbenika. Formalno:

$$\begin{aligned}
&(\forall x)\ x' \neq 1\\
&(\forall x, y)\ x' = y' \Rightarrow x = y\\
&(1 \in S \wedge (\forall x)(x \in S \Rightarrow x' \in S)) \Rightarrow \mathbb{N} \subset S.
\end{aligned}$$

Sada se sabiranje i množenje definišu kao

$$x + 1 = x',\ x \cdot 1 = x,\ x + y' = (x + y)',\ x \cdot y' = x \cdot y + x;$$

važi npr. $1' = 2, 99' = 100$. Iz navedenih definicija slede sve osobine sabiranja i množenja. Teoremu $2+2 = 4$ dokazujemo na sledeći način: $2+2 = 2+1' = (2 + 1)' = (2')' = 3' = 4$.

Algebarski gledano, struktura $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ima sledeće osobine:

- $(\mathbb{N}, +)$ je komutativna polugrupa bez neutrala (jer $0 \notin \mathbb{N}$); ako bismo dodali nulu i dalje ne bi svaki element imao inverz (tj. suprotni element)
- $(\mathbb{N}, \cdot)$ je komutativni monoid sa neutralom (tj. jedinicom) 1

---

[10] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916), nemački matematičar

[11] Giuseppe Peano (1858–1932), italijanski matematičar

- važi distributivnost $\cdot$ prema $+$.

Međutim, veliki nedostatak je to što u strukturi $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ jednačina oblika $a + x = b$ za $a, b \in \mathbb{N}$ ne mora da ima rešenja u skupu prirodnih brojeva.

Skup prirodnih brojeva je prebrojiv i beskonačan. Na njemu je na prirodan način, preko pojma sledbenika, definisano uređenje.

Celi brojevi

Skup celih brojeva[12] $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$ predstavlja dopunu i proširenje skupa prirodnih brojeva tako da za sve $a, b \in \mathbb{Z}$ jednačina $a + x = b$ ima jedinstveno rešenje ($x = -a + b$). Algebarski gledano, struktura $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je komutativni prsten sa jedinicom 1. Još jedno lepo svojstvo - prsten celih brojeva nema delioce nule, tj.

$$(\forall a, b \in \mathbb{Z})\ a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0.$$

Takav prsten naziva se **integralni domen**.

Skup celih brojeva je dobro uređen skup, bez majoranti i minoranti:

$$\cdots < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \ldots .$$

Brojevi veći od nule su **pozitivni**, manji od nule su **negativni**. Uređenje je saglasno sa algebarskim operacijama:

$$a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d, \quad a < b \wedge 0 < c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c.$$

Formalno, cele brojeve možemo konstruisati kao klase ekvivalencije relacije $\sim \subset \mathbb{N}^2$ definisane na sledeći način:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Ako sa $[(a, b)]$ označimo klasu ekvivalencije uređenog para (a, b), tada algebarske operacije i uređenje možemo definisati kao:

- $[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)]$,
- $[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac + bd, ad + bc)]$,
- $[(a, b)] < [(c, d)] \Leftrightarrow a + d < b + c$.

Međutim, kako nema svaki ceo broj inverz u odnosu na množenje, jednačina oblika $a \cdot x = b$ u opštem slučaju nije rešiva u skupu celih brojeva.

[12] Oznaka $\mathbb{Z}$ potiv ce od prvog slova nemačke reči *Zahlen*, što znači broj

Racionalni brojevi

Broj koji se može izraziti kao količnik dva cela broja, $\frac{p}{q}$, gde je p brojilac a $q \neq 0$ imenilac, naziva se **racionalan broj**. Skup racionalnih brojeva označava se sa $\mathbb{Q}$[13]. Racionalne brojeve formalno možemo uvesti kao klase ekvivalencije relacije $\sim \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definisane kao

$$(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2) \Leftrightarrow p_1 q_2 - q_2 p_1 = 0.$$

Formalno, algebarske operacije i uređenje možemo definisati na sledeći način:

- $[(p_1, q_1)] + [(p_2, q_2)] = [(p_1 q_2 + p_2 q_1, q_1 q_2)]$,
- $[(p_1, q_1)] \cdot [(p_2, q_2)] = [(p_1 p_2, q_1 q_2)]$,
- $[(p_1, q_1)] \leq [(p_2, q_2)] \Leftrightarrow (q_1 q_2 > 0 \wedge p_1 q_2 \leq p_2 q_1) \vee (q_1 q_2 < 0 \wedge p_1 q_2 \geq p_2 q_1)$.

Struktura $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je algebarsko polje, i u njemu svaka jednačina oblika $a \cdot x = b,\ a \neq 0$, ima jedinstveno rešenje $x = a^{-1} b$. Pored ovoga, skup racionalnih brojeva je **gust**, u smislu da između dva proizvoljna racionalna broja postoji bar jedan racionalan broj (recimo njihov poluzbir), a samim tim beskonačno mnogo njih.

Međutim, i ova struktura ima slabosti. Posmatrajmo skup aproksimacija broja $\sqrt{2}$:

$$\{1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; \dots\}.$$

Ovaj skup je ograničen odozgo, ali u skupu racionalnih brojeva nema supremum, jer kao što smo već dokazali $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Dakle, i uređeno gusto polje racionalnih brojeva treba na neki način kompletirati. To kompletiranje se može izvesti na više načina, i kao rezultat daje polje realnih brojeva.

Iracionalni brojevi

Svi realni brojevi koji nisu racionalni, tj. koji se ne mogu prikazati kao količnik dva cela broja, nazivaju se **iracionalnim brojevima**. Na primer, takvi su brojevi $\sqrt{2}, \pi, e, \dots$ Skup iracionalnih brojeva označavaćemo sa $\mathbb{I}$. Decimalni zapis iracionalnog broja sastoji se od beskonačno mnogo cifara ali nije periodičan, za razliku od racionalnog broja kod kog postoji periodično ponavljanje cifre ili grupe cifara.

[13]Na osnovu italijenaske reči *qouziente* za količnik, Peano je 1895. uveo ovaj simbol. Inače, termin racionalan potiče od latinske reči *ratio* koja između ostalog znači i odnos

Primer 1.7.1. Dokažimo da je broj $\log_2 3$ ($\approx 1,58 > 0$) iracionalan. Pretpostavimo suprotno, da je $\log_2 3$ racionalan broj. Tada bi postojali prirodni brojevi m i n takvi da $\log_2 3 = \frac{m}{n}$, odakle sledi $2^{\frac{m}{n}} = 3$, odnosno $2^m = 3^n$. Kako ovo važi samo za $m = n = 0$, dobili smo kontradikciju. Dakle, $\log_2 3$ je iracionalan broj.

Kako je $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ i $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$, a znamo da $card(\mathbb{R}) = c$ i $card(\mathbb{Q}) = \aleph_0$, zaključujemo da $card(\mathbb{I}) = c$. Dakle, iracionalnih brojeva ima neprebrojivo mnogo.

Definicija 1.7.3. *Ako su $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ dati brojevi (i $a_n \neq 0$), jednačina*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

naziva se **algebarska jednačina** $n-$**tog reda**. *Realan broj koji je koren algebarske jednačine naziva se* **algebarski broj**. *Realni brojevi koji nisu algebarski su* **transcendentni**.

Skup algebarskih brojeva je prebrojiv, dok je skup transcendentnih brojeva neprebrojiv.

Primer 1.7.2. Primeri algebarskih brojeva su:

- racionalni brojevi, jer $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, je rešenje jednačine $bx - a = 0$.
- Koreni kvadratnog trinoma $ax^2 + bx + c$ sa celobrojnim koeficijentima su algebarski brojevi.
- Za polinome sa celobronim koeficijentima stepena većeg od 4 u opštem slučaju ne mogu se dobiti njihovi koreni korišćenjem samo osnovnih algebarskih operacija i $n-$tog korena.
- Neki iracionalni brojevi su algebarski: $\sqrt{2}$ kao koren $x^2 - 2 = 0$, zatim $\sqrt[3]{2}$ kao koren $x^3 - 2 = 0$, ili konstanta zlatnog preseka φ ($= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$) kao koren $x^2 - x - 1 = 0$.
- Brojevi e i π nisu algebarski brojevi (prema Ermit[14]-Lindeman[15]-Vajerštrasovoj[16] teoremi, koja izlazi izvan okvira ovog kursa).

Brojevi za koje se ne zna da li su algebarski ili transcendentni su npr. $\pi + e$, $\pi - e$, πe, $\frac{\pi}{e}$, π^π, e^e i drugi. Za brojeve $\pi + e^\pi$, πe^π dokazano je da su transcendentni.

[14] Charles Hermite (1822–1901), francuski matematičar

[15] Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852–1939), nemački matematičar

[16] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), nemački matematičar, jedan od osnivača moderne analize

1.8 Metod matematičke indukcije

Formulisati tvrđenje ili bar postaviti hipotezu samo na osnovu eksperimentalnih podataka može biti opasno. Na primer, moglo bi se zaključiti da je broj $n^2 - n + 41$ prost za sve prirodne brojeve n. Zaista, za $n = 1$ imamo 41 (prost broj), za $n = 2$ dobijamo 43, koji je takođe prost. Nastavimo li tako do $n = 40$, dobijamo broj 1601 koji je prost. Ipak, za $n = 41$ dobijamo broj 41^2 koji je očigledno složen. Zatim, često nije moguće (eksperimentalno) proveriti sve slučajeve, posebno ako ih ima beskonačno mnogo. Na primer, ne može se neposredno proveriti da svaki prirodni broj n važi $1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$.

Matematička indukcija predstavlja metod dokazivanja da neko tvrđenje važi za sve prirodne brojeve. Označimo tvrđenje koje zavisi od prirodnog broja sa $P(n)$. Metod se sastoji od dva koraka:

- **baza indukcije** - u ovom koraku dokazuje se da tvrđenje važi za prvi prirodan broj (obično $n = 0$ ili $n = 1$)

- **induktivni korak**, u kojem se pokazuje da ako tvrđenje važi za jedan prirodan broj, onda mora da važi i za sledbenik tog prirodnog broja.

Formalizovani zapis aksiome matematičke indukcije je:

$$\forall P\ [(P(0) \wedge (\forall k \in \mathbb{N})\ P(k) \Rightarrow P(k+1)) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ P(n)],$$

gde je P predikat a $k, n \in \mathbb{N}$.

Nekad je potrebno dokazati tvrđenje koje važi počevši od nekog priodnog broja b. Tada se kao baza indukcije dokazuje $P(b)$, a u induktivnom koraku $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, za sve $n \geq b$.

Ponekad se sreće i sledeća varijanta, tzv. **transfinitna indukcija**: ako tvrđenje važi za prirodne brojeve $1, 2, \ldots, n-1$, tada u induktivnom koraku se pokazuje da $P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(n-1) \Rightarrow P(n)$.

Primer 1.8.1. Pokazaćemo razne oblike matematičke indukcije.

1. Metodom matematičke indukcije lako se pokazuje tvrđenje:

$$P(n): \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Baza indukcije za $n = 1$ je tačna.
Pretpostavimo da tvrđenje tačno za $n = k$ i dokazžimo da $n = k + 1$. Imamo:

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

2. Primer indukcije kod koje se ne počinje od 1 je:
$$P(n): \quad 2^n \geq n^2,\ n \geq 4.$$
3. Primer transfinitne indukcije: Svaki prirodan broj veći od 1 je proizvod prostih brojeva.

Treba biti oprezan sa indukcijom, kao što pokazuje sledeći primer.

Primer 1.8.2. Dokazati metodom matematičke indukcije da svi konji imaju istu boju.[17]
Baza indukcije: za $n = 1$ tvrđenje trivijalno važi.
Induktivna hipoteza: pretpostavimo da n konja uvek imaju istu boju.
Posmatrajmo sada grupu koju čini $n+1$ konj, i označimo ih sa $k_1, k_2, \ldots, k_n$, k_{n+1}. Posmatrajmo sada tu grupu, ali bez prvog konja - dobila se skupina $k_2, \ldots, k_{n+1}$ od n konja na koju možemo primeniti induktivnu hipotezu, što znači da svi oni imaju istu boju. Posmatrajmo sada grupu konja iz koje je udaljen poslednji - dobila se skupina $k_1, \ldots, k_n$ od n konja na koju se takođe može primeniti hipoteza, te i oni imaju istu boju. Pošto ova dva skupa imaju presek, sledi da svih $n+1$ konja moraju imati istu boju, čime smo dokazali tvrđenje.

U čemu je greška? Implicitno smo podrazumevali da dva skupa konja imaju neprazan presek, što nije tačno za $n = 2$.

Primer 1.8.3. Dokazati **Bernulijevu**[18] **nejednakost:** Ako je $h > -1$, $h \neq 0$ i $n \geq 2$, onda
$$(1+h)^n > 1 + nh.$$
Dokaz izvodimo metodom matematičke indukcije.
Baza indukcije $n = 2$: $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h$
Induktivna hipoteza: neka važi za proizvoljno n
Sada: $(1+h)^{n+1} = (1+h)(1+h)^n > (1+h)(1+nh) = 1 + (n+1)h + nh^2 > 1 + (n+1)h$.

Ukoliko tvrđenje $P(m,n)$ zavisi od dva prirodna broja m i n, tada pri dokazivanju koristimo dvodimenzionalnu indukciju. Ona se zasniva na sledećem:

- $P(1,1)$ je tačno,
- Ako je $P(k,1)$ tačno za neko $k \in \mathbb{N}$, tačno je i $P(k+1,1)$,
- Ako $P(k,l)$ važi za neke $k, l \in \mathbb{N}$, tada važi i $P(k, l+1)$,

onda $(\forall m, n \in \mathbb{N})$ važi $P(m,n)$.

[17] Mađarski matematičar Djerđ Polja (Pólya György; 1887–1985) je ovaj primer koristio kao ilustraciju suptilne greške koja se može javiti kod dokazivanja matematičkom indukcijom.

[18] Jacob Bernoulli (oko 1655–1705), švajcarski matematičar iz čuvene porodice Bernuli

1.8.1 Binomni koeficijenti

Primer induktivnog definisanja je definisanje faktorijela[19]:

- $0! = 1$,
- $(\forall n \in \mathbb{N})\ n! = n \cdot (n-1)!$

Dakle, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Može se definisati i dvostruku faktorijel $n!!$ kao proizvod svih brojeva ne većih od n koji su iste parnosti kao n:

$$(2k)!! = (2k)(2k-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2, \ (2k+1)!! = (2k+1)(2k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1.$$

Definicija 1.8.1. *Za $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$, količnik*

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

naziva se **binomni koeficijent**, *u oznaci $\binom{n}{k}$[20], i čita "n nad k".*

Dakle,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \ \binom{n}{0} = 1.$$

Tvrđenje 1.8.1. *Za binomne koeficijente važi:*

1. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$;
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Proof. 1.

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)\ldots(n-k)}{k!} + \frac{(n-1)\ldots(n-k+1)}{(k-1)!} = \\ &= \frac{(n-1)\ldots(n-k+1)}{(k-1)!}\left(\frac{n-k}{k} + 1\right) = \\ &= \frac{(n-1)\ldots(n-k+1)n}{k(k-1)!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

[19] Oznaku $n!$ uveo je 1808. francuski matematičar Christian Kramp (1760–1826), iako su indijski matematičari faktorijel koristili još u XII veku, kao broj načina da se uredi n objekata u niz

[20] Ovu oznaku uveo je 1826. nemački matematičar i fizičar Andreas Freiherr von Ettingshausen (1796–1878), iako su sami koeficijenti bili poznati vekovima ranije

2.
$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$
□

Binomni koeficijenti su u stvari koeficijenti uz $k-$ti član u razvoju binoma $(a+b)^n$. Kombinatorno tumačenje binomnog koeficijenta je broj načina na koje je moguće odabrati k objekata iz skupa od n objekata.

Tvrđenje 1.8.2 (Binomna teorema)**.** *Za proizvoljne $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ važi:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Proof. Dokaz izvodimo metodom matematičke indukcije po n.
Baza indukcije $n = 1$: $(a+b)^1 = a + b$, dakle važi.
Pretpostavimo da formula važi za neko $n \in \mathbb{N}$ i dokažimo da važi za $n+1$.

$$\begin{aligned}
& (a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = a(a+b)^n + b(a+b)^n = \\
= \; & a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \\
= \; & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} = \\
= \; & ab^n + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \ldots + \binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1} + \ldots + \binom{n}{n-1}a^n b + a^{n+1} + \\
+ \; & b^{n+1} + \binom{n}{1}ab^n + \ldots + \binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} + \ldots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b^2 + a^n b = \\
= \; & b^{n+1} + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right)ab^n + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right)a^2 b^{n-1} + \ldots + \\
+ \; & \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)a^k b^{n-k+1} + \ldots + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right)a^n b + a^{n+1} = \\
= \; & b^{n+1} + \binom{n+1}{1}ab^n + \binom{n+1}{2}a^2 b^{n-1} + \ldots + \binom{n+1}{n}a^n b + a^{n+1} = \\
= \; & \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k}.
\end{aligned}$$

U dokazu se, osim induktivne hipoteze, koriste rezultati iz tvrđenja 1.8.1. □

Jedna lepa reprezentacija binomnih koeficijenata je **Paskalov**[21] **trougao**. U $n-$tom redu Paskalovog trougla nalaze se redom koeficijenti u razvoju binoma $(a+b)^n$. I ne samo to, Paskalov trougao služi i za jednostavno generisanje binomnih koeficijenata: trougao je simetričan u odnosu na vertikalnu osu (zbog $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$), po obodu trougla nalaze se jedinice (jer je $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$), i počevši od druge vrste, svaki koeficijent dobija se kao zbir dva koeficijenta koji se nalaze u vrsti iznad, po jedno mesto levo i desno od posmatranog elementa (jer je $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$).

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

Za odgovarajuće vrednosti a i b mogu se iz binomne formule dobiti lepi identiteti:

- $a = b = 1:$ $\qquad 2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n};$

- $a = 1, b = -1:$ $\qquad 0 = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n};$

- Ako saberemo/oduzmemo jednakosti koje smo dobili u prethodna dva slučaja i podelimo sa 2, dobijamo:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots = 2^{n-1}, \qquad \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots = 2^{n-1}.$$

1.8.2 Apsolutna vrednost broja

Definicija 1.8.2. *Ako $x > 0$ (odnosno $x \geq 0$), broj x je* **pozitivan** *(odnosno* **nenegativan***). Analogno se definiše negativan broj.*

Definicija 1.8.3. *Ako $x \leq y$, tada je x minimalni, a y maksimalni element skupa $\{x, y\}$. To zapisujemo: $x = \min\{x, y\}$, $y = \max\{x, y\}$.*

U opštem slučaju,

$$\min\{x, y, z\} = \min\{\min\{x, y\}, z\}; \ \max\{x, y, z\} = \max\{\max\{x, y\}, z\}.$$

[21] Naziv je dobio po čuvenom matematičaru, fizičaru, pronalazaču i filozofu Blezu Paskalu (Blaise Pascal (1623–1662)), mada je Paskalov trougao bio poznat vekovima ranije u raznim kulturama.

Definicija 1.8.4. *Broj* $\max\{x, -x\}$ *naziva se* **apsolutna vrednost** *broja* x, *u oznaci* $|x|$.

Dakle, neposredno se vidi da $|-x| = x$ i $x \leq |x|$ za sve $x \in \mathbb{R}$, kao i

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Važi i sledeća veza sa signum funkcijom: $|x| = sgn(x) \cdot x$.

Tvrđenje 1.8.3. *Neka su* $x, y \in \mathbb{R}$. *Tada važi:*

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$,
2. $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$,
3. $|xy| = |x||y|$,
4. *ako* $y \neq 0$, *tada* $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.

Proof. 1. Ako $x + y \geq 0$, onda $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$.
Ako $x + y < 0$, onda $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$.

2. Stavimo da $x - y = z$, na osnovu 1) imamo:

$$|x| = |y + z| \leq |y| + |z| \Rightarrow |z| = |x - y| \geq |x| - |y|.$$

Zbog $|x - y| = |y - x|$ tačna je i nejednakost $|y| - |x| \leq |x - y|$. Pošto je jedan od brojeva $|x| - |y|$ ili $-(|x| - |y|)$ jednak broju $||x| - |y||$, sledi $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Kako je $|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| \leq |x| + |y|$, dokaz je gotov.
Tvrđenja 3) i 4) dokazuju se analogno, razlikovanjem slučajeva.

□

Neka je $a > 0$.

- Jednačina $|x| = a$, po definiciji apsolutne vrednosti, ima dva rešenja $x = a$ i $x = -a$.
- Nejednačina $|x| \leq a$ ekvivalentna je sa $-a \leq x \leq a$ i njeno rešenje je skup $\{x : -a \leq x \leq a\}$.
- Rešenje nejednačine $|x| > a$ je skup $\{x : a < x \vee x < -a\}$.

1.9 Posledice aksiome supremuma

Podsetimo se: aksioma supremuma tvrdi da svaki neprazan odozgo ograničen podskup skupa realnih brojeva ima supremum, tj. za proizvoljan neprazan skup $A \subset \mathbb{R}$, ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je $(\forall x \in A)\ x \leq M$, tada postoji $\xi \in \mathbb{R}$ takav da $\sup A = \xi$.

Posmatrajmo skup $A = \{r \in \mathbb{Q} : r < \sqrt{2}\}$; on je neprazan i odozgo ograničen, jer je bilo koji racionalan broj veći od $\sqrt{2}$ njegova gornja granica (majoranta). Međutim, skup A nema najmanju majorantu u skupu $\mathbb{Q}$, te ne postoji supremum u skupu $\mathbb{Q}$. Dakle, skup racionalnih brojeva nije kompletno polje.

Tvrđenje 1.9.1. *1. Svaki neprazan odozdo ograničen skup $A \subset \mathbb{R}$ ima infimum i* $\inf A = -\sup(-A)$, *gde je* $-A = \{-x : x \in A\}$.

2. Ako su skupovi A i B ograničeni odozgo i $A \subset B$, tada $\sup A \leq \sup B$; *ako su ograničeni odozdo tada* $\inf A \geq \inf B$.

3. Ako je $(\forall x \in A)(\forall y \in B)\ x \leq y$, tada je skup A ograničen odozgo, skup B ograničen odozdo i $\sup A \leq \inf B$.

Proof. 1. Skup A je odozdo ograničen, tj. $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in A)\ M \leq x$; odavde sledi $(\forall x \in A)\ -x \leq -M$, tj. skup $-A$ je odozgo ograničen. Na osnovu aksiome supremuma, postoji $\xi \in \mathbb{R}$ tako da $\sup(-A) = \xi$. Iz $-x \leq \xi$ sledi $(\forall x \in A)\ -\xi \leq x$, pri čemu je $-\xi$ najveća minoranta skupa A. Zaista, ako bi postojalo neko z tako da $-\xi < z \leq x$ onda bi $-z$ bila najmanja majoranta skupa $-A$, što je nemoguće jer je to ξ.

2. Iz $A \subset B$ sledi $(\forall x \in A)\ x \leq \sup B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$. Dualno za infimum.

3. Skup A je odozgo ograničen proizvoljnim elementom skupa B, dok je skup B odozdo ograničen proizvoljnim elementom skupa A. Dalje,

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)\ x \leq y \Rightarrow (\forall y \in B)\ \sup A \leq y \Rightarrow \sup A \leq \inf B.$$

□

Tvrđenje 1.9.2 (Egzistencija i jedinstvenost $n-$tog korena)**.**

$$(\forall x > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! y > 0)\ y^n = x.$$

Taj broj označava se sa $\sqrt[n]{x}$ *i naziva* $n-$**ti koren broja** x.

Proof. Skica dokaza:

- Neka je $A = \{z \in \mathbb{R} : z > 0 \land z^n \leq x\}$. On je ograničen odozgo sa 1 ako $x \leq 1$ odnosno sa x ako $x > 1$; dakle, postoji $y = \sup A > 0$.
- Dokazuje se da $y^n = x$.
- Jedinstvenost sledi iz $y_1 < y_2 \Rightarrow y_1^n < y_2^n$.

□

Iz $(-x)^{2k} = (-1)^{2k}x^{2k} = x^{2k}$ sledi da jednačina $y^n = x > 0$ za parno n pored pozitivnog korena $y_1 = \sqrt[n]{x}$ ima i negativni koren $y_2 = -\sqrt[n]{x}$, dok jednačina $y^n = x < 0$ nema realnih rešenja. Iz $(-x)^{2k-1} = (-1)^{2k-1}x^{2k-1} = -x^{2k-1}$ sledi da jednačina $y^n = x > 0$ za neparno n ima jedinstven realan koren. Tada i jednačina $y^n = x < 0$ ima jedinstveni koren $y = -\sqrt[n]{|x|}$.

Tvrđenje 1.9.3. *Ako su $x, y > 0$ i $m, n \in \mathbb{N}$, tada:*

1. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\ \sqrt[n]{y}$,
2. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$,
3. $\sqrt[n]{x}\ \sqrt[m]{x} = \sqrt[nm]{x^{n+m}}$.

Proof. Neka $\sqrt[n]{x} = a$, $\sqrt[n]{y} = b$, $\sqrt[n]{xy} = c$. Na osnovu definicije korena imamo $x = a^n$, $y = b^n$ i $xy = c^n$. Dakle, $c^n = a^n b^n = (ab)^n$. Odavde, na osnovu jedinstvenosti $n-$tog korena, sledi $c = ab$, odnosno $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$.

Ostatak tvrđenja dokazuje se analogno. □

Sada se može definisati stepen pozitivnog broja sa racionalnim izložiocem $\frac{p}{q}$ na sledeći način:

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}.$$

Definicija 1.9.1. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $a < b$. Tada:*

1. $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ *je* **zatvoreni interval** *ili* **segment**;
2. $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ *je* **otvoreni interval**;
3. $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ *je* **poluinterval zatvoren s desna**;
4. $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$ *je* **poluinterval zatvoren s leva**.

Razlika $b - a$ je **dužina intervala**, a tačke a i b su redom levi i desni kraj. Ovo su primeri ograničenih skupova, pri čemu $\sup(a, b) = \sup[a, b] = b$, $\inf(a, b) = \inf[a, b] = a$.

1.10 Arhimedova aksioma i njene posledice

Arhimedova aksioma (ili Arhimedovo svojstvo) tvrdi da ne postoje beskonačno veliki ni beskonačno mali realni brojevi. Naziv je dao Štolc[22], u čast Arhimeda[23] u čijem delu "O sferi i cilindru" se pominje kao aksioma broj 5.

Tvrđenje 1.10.1. *Za pozitivne realne brojeve a i b postoji jedinstveni prirodan broj n takav da je*

$$(n-1)a \leq b < na.$$

Proof. Pretpostavimo suprotno, da ne postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da $b < na$. To znači da $(\forall n \in \mathbb{N})\ na \leq b$. Posmatrajmo skup $A = \{na : n \in \mathbb{N}\}$; on je ograničen odozgo sa b, te postoji $c = \sup A$. Zbog $a > 0$ je $c - a < c$, pa $c - a$ ne može biti majoranta skupa A, pa postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da $ma > c - a$. Sada je $c < ma + a = (m+1)a \in A$, što je kontradikcija sa izborom broja c kao supremuma skupa A. Dakle, $(\exists n \in \mathbb{N})\ b < na$. □

Tvrđenje 1.10.2 (Arhimedova aksioma)**.**

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})\ x < n.$$

Proof. Ako je $x \leq 0$, tada je na primer $n = 1$ traženi prirodni broj. Neka je zato $x > 0$. Skup $S = \{a \in \mathbb{N} : a \leq x\}$ je neprazan, ograničen odozgo, pa po aksiomi supremuma postoji $\sup S = s \in \mathbb{R}$. Broj $s - 1 < s$ nije majoranta skupa S te zato postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da $m > s - 1$ odnosno $m + 1 > s$. Kako je sledbenik svakog prirodnog broja prirodan broj, sledi $m + 1 \in \mathbb{N}$. Dakle, $m + 1 \notin S$ te zato $m + 1 > s$. □

Posledica 1.10.1.

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{Z})\ n - 1 \leq x < n.$$

Broj $n - 1$ naziva se **najveći ceo deo od** x i označava sa $[x]$, dok je broj $x - [x]$ **razlomljeni deo od** x, u oznaci $\{x\}$. Dakle, $(\forall x \in \mathbb{R})\ x = [x] + \{x\}$.

Posledica 1.10.2.

$$(\forall y > 0)\ \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{y}{n} \right\} = 0.$$

[22]Otto Stolz (1842–1905), austrijski matematičar

[23]Archimedes of Syracuse ($A\rho\chi\iota\mu\eta\delta\eta\varsigma$; oko 287 p.n.e oko 212 p.n.e), veliki starogrčki matematičar, fizičar, pronalazač i astronom

Proof. Na osnovu Arhimedovog svojstva, za $y > 0$ postoji prirodan broj n takav da za sve $x > 0$ važi $y < nx$, tj.

$$0 < \frac{y}{n} < x.$$

Kako je skup $\{\frac{y}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ neprazan i odozdo ograničen, postoji njegov infimum ξ. Ako bi bilo $\xi > 0$, postojalo bi $n \in \mathbb{N}$ takvo da $\frac{y}{n} < \xi$, što je u suprotnosti sa odabirom broja ξ. Dakle, mora biti $y = 0$. □

Tvrđenje 1.10.3. *Svaki interval (a, b) sadrži racionalan broj.*

Proof. Neka je $h = b-a > 0$. Prema Arhimedovom svojstvu, $(\exists n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{h} < n$, odnosno $0 < \frac{1}{n} < h$. Na osnovu istog tvrđenja, postoji ceo broj m takav da

$$\frac{m}{n} \leq a < \frac{m+1}{n}.$$

Važi:

$$\frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + h = a + (b - a) = b,$$

pa je $\frac{m+1}{n} \in (a, b)$ traženi racionalni broj. □

Kao posledicu dobijamo da se svaki iracionalan broj može aproksimirati racionalnim brojem s proizvoljnom tačnošću $\varepsilon > 0$. Zaista, po prethodnom tvrđenju postoji racionalan broj $q \in (x, x + \varepsilon)$, pa je $|x - q| < \varepsilon$.

Sada smo u mogućnosti da uvedemo stepenovanje pozitivnog broja realnim brojem.

Definicija 1.10.1. *Neka je $x > 1$ i $y \in \mathbb{R}$. Pod simbolom x^y podrazumeva se realan broj z takav da je*

$$x^a \leq z \leq x^b,$$

ako je $a \leq y \leq b$ i $a, b \in \mathbb{Q}$.

Napomena: Ako $0 < x < 1$ stavlja se $x^y = (\frac{1}{x})^{-y}$ čime se svodi na već definisani slučaj. Ako $x = 1$ stavlja se $1^y = 1$.

Egzistencija broja iz prethodne definicije sledi iz ograničenosti skupa $\{x^a\}$ odozgo, zbog čega postoji $z = \sup\{x^a\}$, gde $a \leq y \wedge a \in \mathbb{Q}$. Dalje,

$$(\forall a \leq y \wedge a \in \mathbb{Q})(\forall b \geq y \wedge b \in \mathbb{Q})\ x^a \leq z \leq x^b.$$

Jedinstvenost takvog realnog broja z dokazuje se tako što se pokaže da u nizu umetnutih segmenata $[x^a, x^b]$ postoji jedan čija je dužina manja od proizvoljnog $\varepsilon > 0$.

Dakle, po definiciji je: $x^y = \sup\{x^a : a \leq y \wedge a \in \mathbb{Q}\}$.

1.10.1 Kantorov princip umetnutih segmenata

Posmatrajmo niz poluotvorenih intervala:

$$(0,1] \supset \Big(0,\frac{1}{2}\Big] \supset \Big(0,\frac{1}{3}\Big] \supset \cdots \supset \Big(0,\frac{1}{n}\Big] \supset \Big(0,\frac{1}{n+1}\Big] \supset \ldots$$

Presek ovih skupova je prazan skup:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big(0,\frac{1}{n}\Big] = \emptyset.$$

Zaista, ako pretpostavimo suprotno, da postoji $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(0,\frac{1}{n}\big]$, za svaki prirodan broj n sledi $x \in (0,\frac{1}{n}]$, odnosno da $0 < x \leq \frac{1}{n}$. Dakle, $0 < x \leq \inf\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$, odnosno dobili smo kontradikciju. Dakle, skup poluotvorenih intervala takvih da je svaki sadržan u prethodnom ne mora da ima neprazan presek.

Definicija 1.10.2. *Za niz segmenata $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ realne prave za koji važi:*

$$[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots \supset [a_n,b_n] \supset [a_{n+1},b_{n+1}] \supset \ldots$$

kaže se da je **niz umetnutih segmenata**.

Teorema 1.10.1 (Kantor). *Svaki niz umetnutih segmenata ima neprazan presek. Preciznije,*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n,b_n] = [a,b],$$

gde $a = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n, \quad b = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$.

Proof. Posmatrajmo skupove: $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{b_n : b_n \in \mathbb{N}\}$. Pošto $(\forall n \in \mathbb{N})\ [a_n,b_n] \subset [a_1,b_1]$, sledi da $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq b_1$, pa je neprazan skup A odozgo ograničen i postoji $a = \sup A = \sup a_n$. Kako je a najmanja majoranta skupa A sledi da $(\forall n \in \mathbb{N})\ a \leq b_n$, odnosno neprazan skup B je odozdo ograničen sa a, te prema tome ima infimum $b = \inf B = \inf b_n$. Mora biti $a \leq b$. Dokažimo sada da $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n,b_n] = [a,b]$.

$$(\subseteq): \quad x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n] \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ x \in [a_n,b_n] \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq x \leq b_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup A = \sup a_n \leq x \leq \sup b_n = \sup B \Rightarrow a \leq x \leq b \Rightarrow x \in [a,b];$$

$$(\supseteq): \quad x \in [a,b] \Rightarrow a \leq x \leq b \Rightarrow \sup a_n \leq x \leq \sup b_n \Rightarrow$$
$$(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq \sup a_n \leq x \leq \inf b_n \leq b_n \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq x \leq b_n \Rightarrow$$
$$(\forall n \in \mathbb{N})\ x \in [a_n,b_n] \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n].$$

$\square$

Definicija 1.10.3. *Za niz umetnutih segmenata* $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *kažemo da im* **dužina teži nuli** *ako*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ b_n - a_n < \varepsilon.$$

Tvrđenje 1.10.4. *Presek niza umetnutih segmenata čije dužine teže nuli je jedinstvena tačka:*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\xi\}.$$

Proof. Prema Kantorovoj teoremi o umetnutim segmentima, $\bigcap [a_n, b_n] = [a, b]$, gde je $a = \sup a_n$, a $b = \inf b_n$. Dakle, $(\forall n \in \mathbb{N})\ [a, b] \subset [a_n, b_n]$. Za dužine segmenata važi $(\forall n \in N)\ b - a \leq b_n - a_n$. Kako dužine umetnutih semenata teže nuli, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 tako da $(\forall n \geq \mathbb{N})\ b_n - a_n < \varepsilon$. Prema tome, $0 \leq b - a < \varepsilon$, za sve $\varepsilon > 0$. Ako bi bilo $b - a > 0$, onda za odabrano $\varepsilon = b - a$ imamo $b - a < b - a$, što je nemoguće. Dakle, mora biti $b - a = 0$, tj. $b = a = \xi$. □

Ovo svojstvo ne važi u skupu racionalnih brojeva. Zaista, posmatrajmo niz umetnutih segmenata čije dužine teže nuli:

$$[1; 2] \cap \mathbb{Q} \supset [1,4; 1,5] \cap \mathbb{Q} \supset [1,41; 1,42] \cap \mathbb{Q} \supset [1,414; 1,415] \cap \mathbb{Q} \supset \ldots$$

Presek ovih segmenata je prazan skup. Broj $\sqrt{2}$ pripada svakom od segmenata, ali nije racionalan broj.

Napomena: Aksioma supremuma ekvivalenta je sa istovremenim važenjem Arimedove teoreme i Kantorovog principa.

1.10.2 Proširenje skupa realnih brojeva

Skup realnih brojeva proširen sa dva simbola, $+\infty$ i $-\infty$ (čita se "plus beskonačno" i "minus beskonačno") naziva se **prošireni skup realnih brojeva** i označava sa $\overline{\mathbb{R}}$. Važi sledeće: $(\forall x \in \mathbb{R})\ -\infty < x < +\infty$ i $-\infty < +\infty$.

Skup $\overline{\mathbb{R}}$ je uređen i u njemu svaki neprazan skup ima supremum i infimum (ako skup $A \neq \emptyset$ ima supremum u $\mathbb{R}$, onda je isti taj supremum i u $\overline{\mathbb{R}}$; ako ne postoji supremum u $\mathbb{R}$, onda je to $+\infty$; dualno za minimum).

Intervali sa bar jednom beskonačnom granicom definišu se kao:

- $(-\infty, b] = \{x : x \leq b \wedge x \in \mathbb{R}\}$;
- $[a, +\infty) = \{x : x \geq a \wedge x \in \mathbb{R}\}$;
- $(-\infty, +\infty) = \{x : -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$.

Operacije na skupu $\overline{\mathbb{R}}$:

- $(\forall x \in \mathbb{R})\ x + \infty = \infty,\ x - \infty = -\infty; \quad (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty;$
- $(\forall x > 0)\ x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \quad (\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty;$
- $(\forall x < 0)\ x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty, \quad (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$
- izrazi $(-\infty) + (+\infty),\ 0 \cdot (\pm\infty),\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{\pm\infty}{\mp\infty}$ nisu definisani.

Glava 2

Kompleksni brojevi

2.1 Polje $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

Definišimo na skupu $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sabiranje i množenje na sledeći način:

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$,

gde je $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Dokazaćemo da je $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ polje.

1) Lako se pokazuje da je $(\mathbb{R}^2, +)$ Abelova grupa, gde je $(0, 0)$ neutral za sabiranje, a inverz elementa (x, y) je $(-x, -y)$.

2) Struktura $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \cdot)$ je Abelova grupa, gde je $(1, 0)$ neutral, a inverz elementa (x, y) je

$$(x, y)^{-1} = \Big(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\Big).$$

Zaista, komutativnost i asocijativnost slede neposredno. Potražimo neutral: to je element $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ takav da

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})\ (x, y) \cdot (e_1, e_2) = (x, y).$$

Dakle, mora biti $(xe_1 - ye_2, xe_2 + e_1y) = (x, y)$, odnosno

$$\begin{aligned} xe_1 - ye_2 &= x, \\ xe_2 + e_1y &= y, \end{aligned}$$

odakle je $x = 1,\ y = 0$.

Potražimo sada inverz za element $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. To je element $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ za koji važi:

$$(x, y) \cdot (a, b) = (1, 0),$$

odnosno $(xa - yb, xb + ay) = (1, 0)$, što se svodi na sistem:

$$\begin{aligned} xa - yb &= 1, \\ xb + ay &= 0, \end{aligned}$$

čije je rešenje:

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2}, \; b = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

3) Distributivnost važi na osnovu distributivnosti $+$ prema $\cdot$.

Dakle, struktura $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ je polje.

Između skupa $\mathbb{R}^2$ i tačaka ravni $x0y$ postoji bijektivno preslikavanje

$$(a, b) \mapsto A(a, b)$$

koje uređenom paru (a, b) jednoznačno pridružuje tačku ravni A sa Dekartovim koordinatama (a, b). Tački A pridružimo orijentisanu duž (vektor) čiji je početak u $(0, 0)$ a kraj u tački A.

2.2 Polje kompleksnih brojeva

Podsetimo se, ako su X i Y dva polja, i $Y \subset X$, tada je Y **potpolje** polja X ako je Y polje u odnosu na restrikcije algebarskih operacija polja X na skup Y. Na primer, polje $\mathbb{Q}$ je potpolje polja $\mathbb{R}$.

Neka je $\mathbb{R}' = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Lako se pokazuje da je $(\mathbb{R}', +, \cdot)$ potpolje polja $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Tvrđenje 2.2.1. *Funkcija $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}'$ definisana sa*

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; f(x) = (x, 0)$$

je izomorfizam polja $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ i polja $(\mathbb{R}', +, \cdot)$.

Proof. Dovoljno je dokazati da je f homomorfizam:

1. $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \; f(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = f(x) + f(y)$;

2. $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \; f(xy) = (xy, 0) = (x, 0) \cdot (y, 0) = f(x) \cdot f(y)$.

$\square$

Kako se izomorfne strukture u algebarskom smislu ne razlikuju, njihovi odgovarajući elementi mogu se poistovetiti, pa se zato mogu poistovetiti par $(x, 0)$ i realan broj x:

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (x, 0) = x.$$

Dakle, $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1)$. Ako uvedemo oznaku

$$(0, 1) \equiv i,$$

tada

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\ (x, y) = x + iy.$$

Inače, iz definicije sledi:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Definicija 2.2.1. *Skup svih elemenata oblika $x + iy$, gde $x, y \in \mathbb{R}$, naziva se* **skup kompleksnih brojeva**, *u oznaci $\mathbb{C}$. Element $i \in \mathbb{C}$ je* **imaginarna jedinica**. *Struktura $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ naziva se* **polje kompleksnih brojeva**.

Kompleksni brojevi obično se označavaju sa z ili ω. Zapis broja $z = (x, y)$ u obliku $z = x + iy$ naziva se **algebarski oblik** kompleksnog broja z. Brojevi x i y nazivaju se redom **realni** i **imaginarni deo** kompleksnog broja, u oznaci redom:

$$x = Re(z), \quad y = Im(z).$$

Ukoliko je $Im(z) = 0$, broj z je **čisto realan**, a ako je $Re(z) = 0$, onda je **čisto imaginaran**.

Kompleksne brojeve možemo predstavljati kao tačke u Dekartovoj ravni, kod koje je $x-$osa realna osa, dok je $y-$osa imaginarna. Kompleksnom broju $z = Re(z) + iIm(z)$ odgovara tačka čije su koordinate $(Re(z), Im(z))$.

Kompleksni brojevi z_1 i z_2 su **jednaki** ako su im jednaki odgovarajući realni i imaginarni delovi: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow Re(z_1) = Re(z_2) \wedge Im(z_1) = Im(z_2)$. Prema tome, $z \neq 0$ znači: $Re(z) \neq 0 \vee Im(z) \neq 0$. U polju $\mathbb{C}$ ne može se uvesti uređenje saglasno sa operacijama.

Za brojeve $z = x + iy$ i $\overline{z} = x - iy$ kaže se da su **konjugovano kompleksni**. Očigledno je $\overline{\overline{z}} = z$, tj. konjugacija je involutivna operacija. Geometrijski, broj $\overline{z}$ je simetričan u odnosu na realnu osu sa brojem z.

Realan broj $\sqrt{z\overline{z}}$ naziva se **moduo** ili **apsolutna vrednost** kompleksnog broja z, u oznaci $|z|$. Dakle,

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{x^2 - i^2y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Jasno je da: $|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} \geq \sqrt{(Re(z))^2} = |Re(z)| \geq Re(z)$, potpuno analogno se pokazuje da $Im(z) \leq |z|$. Geometrijski, moduo kompleksnog broja je dužina od tačke $(0, 0)$ do tačke sa koordinatama (x, y), dok je smisao nejednakosti $|Re(z)| \leq |z|$ i $|Im(z)| \leq |z|$ sledeći: dužina hipotenuze trougla veća je od dužine kateta. Važi i $|\overline{z}| = |z|$.

Operacije sa kompleksnim brojevima u algebarskoj formi

Za date kompleksne brojeve $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ važi:

- $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)$,
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$,
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\ z_2 \neq 0.$

Neke osobine konjugovanja kompleksnih brojeva:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)} = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$,
- $\overline{z_1z_2} = \overline{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$,
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2 \neq 0.$

Tvrđenje 2.2.2. *Neka su z_1 i z_2 dati kompleksni brojevi. Tada važi:*

1. $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$,
2. *relacija trougla:* $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,
3. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2|$,
4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0.$

Proof. U dokazu koristimo $|z|^2 = z\overline{z}$, $z + \overline{z} = 2Re(z)$ i $Re(z) \leq |z|$.

1. $|z_1z_2|^2 = z_1z_2\overline{z_1z_2} = z_1z_2\overline{z_1}\ \overline{z_2} = z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2} = |z_1|^2|z_2|^2$. Moduo kompleksnog broja je nenegativan i korenovanjem dobijamo traženu jednakost.
2. $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{z_1 + z_2} = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$
Kako je $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2Re(z_1\overline{z_2})$, imamo dalje
$$\begin{aligned} & |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 = \\ = \ & |z_1|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$
Korenovanjem dobijamo traženu nejednakost.

3. Primenimo nejednakost trougla na $z_1 - z_2$ i z_2 dobijamo:

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|,$$

odakle sledi $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$. Na sličan način pokazuje se da $|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$, te prema tome

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

Na sličan način, polazeći od $z_1 = (z_1 + z_2) + (-z_2)$ dobijamo drugi deo tvrđenja.

4. Neka je $z = \frac{z_1}{z_2}$, tada $z_1 = zz_2$. Prema 1) imamo $|z_1| = |zz_2| = |z||z_2|$, odakle je $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$. Dakle, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

$\square$

2.2.1 Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Svaki kompleksan broj $z \neq 0$ (dakle, $|z| > 0$) može se zapisati u obliku:

$$z = x + iy = |z|\Big(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\Big).$$

Tačka $M(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|})$ leži na jediničnoj kružnici sa centrom u koordinatnom početku, jer:

$$\Big(\frac{x}{|z|}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{|z|}\Big)^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

Kako $(\forall \theta \in \mathbb{R})\ \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, označimo:

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|}, \quad \sin\theta = \frac{y}{|z|}.$$

Funkcije sinus i kosinus su periodične (osnovni period 2π), pa važi:

$$\cos(\theta + 2k\pi) = \frac{x}{|z|}, \quad \sin(\theta + 2k\pi) = \frac{y}{|z|}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Svaki broj θ koji zadovoljava jednačine (2.1) naziva se **argument broja** z, u oznaci $Arg\ z$. Postoji tačno jedan broj $\theta \in [0, 2\pi)$; tu vrednost zovemo **glavna vrednost argumenta** kompleksnog broja z, u oznaci $\arg z$. Dakle,

$$Arg\ z = \{\arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Geometrijski, argument broja z je ugao između usmerene duži sa početkom u (0,0) i vrhom u $(Re(z), Im(z))$ i pozitivnog smera $x-$ose. Za $z = 0$ argument je neodređen. Nekad se uzima da glavni argument pripada $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Kako je $\frac{x}{|z|} = \cos\theta$, $\frac{y}{|z|} = \sin\theta$, sledi da

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{y}{|z|}}{\frac{x}{|z|}} = \frac{y}{x},$$

odakle je

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} + k\pi.$$

Parametar k zavisi od kvadranta u kojem se nalazi kompleksni broj $z = x+iy$ zbog osobina funkcija arctan i tan, za koje važi $\tan(\arctan x) = x$, za sve $x \in \mathbb{R}$, ali $\arctan(\tan x) = x$ samo za $(-\pi/2, \pi/2) + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

U zavisnosti od kvadranta kompleksne ravni u kojem se nalazi kompleksni broj $z = x + iy$, za njegov argument važi:

- I kvadrant, tj. $x, y > 0$: ovde je $y/x > 0$, pa je $\arctan\frac{y}{x} \in (0, \pi/2)$;

- II kvadrant, tj. $x < 0,\ y > 0$: ovde je $y/x < 0$, pa je $\arctan y/x \in (-\pi/2, 0)$; da bi se ovaj ugao zaista nalazio u drugom kvadrantu (drugi kvadrant sadrži uglove od $\pi/2$ do π), moramo dobijenom rezultatu dodati π. Dakle, $\arctan\frac{y}{x} + \pi$;

- III kvadrant, tj. $x, y < 0$: ovde je $y/x > 0$, pa je $\arctan y/x \in (0, \pi/2)$; da bi se ovaj ugao zaista nalazio u trećem kvadrantu (treći kvadrant sadrži uglove od π do $3\pi/2$), moramo dobijenom rezultatu dodati π. Dakle, $\arctan\frac{y}{x} + \pi$;

- IV kvadrant, tj. $x > 0,\ y < 0$: ovde je $y/x < 0$, pa je $\arctan y/x \in (-\pi/2, 0)$; da bi se ovaj ugao zaista nalazio u četvrtom kvadrantu (koji sadrži uglove od $3\pi/2$ do 2π), moramo dobijenom rezultatu dodati 2π. Dakle, $\arctan\frac{y}{x} + 2\pi$;

- ako $y = 0$, tada se z nalazi na realnoj osi, i $\arg z = 0$ ako $x > 0$, odnosno $\arg z = \pi$ za $x < 0$;

- ako $x = 0$, tada se z nalazi na imaginarnoj osi, i $\arg z = \pi/2$ ako $y > 0$, odnosno $\arg z = 3\pi/2$ za $y < 0$;

- za $x = y = 0$, podsećamo, argument nije definisan.

Prema tome,

$$\arg z = \arctan \frac{y}{x} + k\pi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0,\ y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi, & x > 0,\ y < 0 \\ \pi/2, & x = 0,\ y > 0 \\ 3\pi/2, & x = 0,\ y < 0 \end{cases}.$$

Definicija 2.2.2. *Ako je $z = x + iy$, onda je*

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

trigonometrijski oblik *kompleksnog broja z, gde je $\rho = |z|$ i $\varphi = \arg z$.*

Množenje i deljenje kompleksnih brojeva

Algebarski oblik kompleksnog broj je vrlo nepodesan za množenje. Umesto njega koristi se znatno pogodniji trigonometrijski oblik. Kompleksni brojevi u trigonometrijskom obliku se množe tako što im se moduli pomnože, a argumenti saberu.

Tvrđenje 2.2.3. *Data su dva kompleksna broja $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Tada:*

1. $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$,
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),\ z_2 \neq 0.$

Proof. Neposredno se dokazije:

$$\begin{aligned} & z_1 z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = \ & \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) = \\ = \ & \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) = \\ = \ & \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} \cdot \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos^2\varphi - i^2\sin^2\varphi} = \\ & = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi), \end{aligned}$$

deljenje kompleksnih brojeva z_1 i z_2 svodi se na množenje. $\square$

Stepenovanje kompleksnih brojeva

Za stepenovanje kompleksnih brojeva algebarski oblik je nepodesan, pa se umesto njega koristi trigonometrijski oblik.

Teorema 2.2.1 (Muavrova[1] formula)**.**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi),\ n \in \mathbb{N}.$$

Proof. Dokaz izvodimo koristeći metod matematičke indukcije.
Za $n = 1$ tvrđenje važi.
Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n = k$ i dokažimo da je tačno i za $k + 1$.

$$\begin{aligned}
&(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{k+1} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^k(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \\
&= (\cos k\varphi + i\sin k\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \\
&= (\cos k\varphi\cos\varphi - \sin k\varphi\sin\varphi) + i(\cos k\varphi\sin\varphi + \sin k\varphi\cos\varphi) = \\
&= \cos(k\varphi + \varphi) + i\sin(k\varphi + \varphi) = \cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi.
\end{aligned}$$

□

Formula je tačna i za negativne cele brojeve:

$$\begin{aligned}
(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} &= \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n} = \frac{1}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi} = \\
&= \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)) = \cos((-n)\varphi) + i\sin((-n)\varphi).
\end{aligned}$$

Stepenovanje kompleksnog broja izvodi se na sledeći način:

$$z^n = (\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Korenovanje kompleksnih brojeva

Jednačina $x^2 + 1 = 0$ u skupu realnih brojeva nema rešenje, jer je $x^2 \geq 0$ za sve realne brojeve x. Međutim, na osnovu definicije kompleksnog broja i imamo $i^2 = -1$, pa pomenuta jednačina ima rešenje $x = i$ u skupu imaginarnih brojeva.

Tvrđenje 2.2.4. *Neka je $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i $n \in \mathbb{N}$. Rešenje jednačine*

$$\omega^n = z$$

po ω su kompleksni brojevi

$$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}.$$

[1] Abraham de Moivre (1667–1754), francuski matematičar

Proof. Neka je $\omega = R(\cos\theta + i\sin\theta)$. Tada imamo:

$$\omega^n = R^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z,$$

odakle sledi:

$$\begin{aligned} R^n\cos n\theta &= \rho\cos\varphi, \\ R^n\sin n\theta &= \rho\sin\varphi. \end{aligned}$$

Kvadriranjem i sabiranjem gornjih jednačina dobija se:

$$R^{2n} = \rho^2,\ \cos n\theta = \cos\varphi,\ \sin n\theta = \sin\varphi.$$

Dakle, mora biti $R = \sqrt[n]{\rho}$ i $n\theta - \varphi = 2m\pi$, gde $m \in \mathbb{Z}$. Dakle, dobili smo familiju korenova:

$$\omega_m = \sqrt[n]{\rho}\cdot\Big(\cos\frac{\varphi+2m\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2m\pi}{n}\Big),\ m\in\mathbb{Z}.$$

Svaki ceo broj m možemo na jedinstven način predstaviti u obliku

$$m = qn + k,\ q\in\mathbb{Z},\ k\in\{0,1,\cdots,n-1\}.$$

Sada imamo:

$$\frac{\varphi+2m\pi}{n} = \frac{\varphi+2(nq+k)\pi}{n} = \frac{\varphi+2qn\pi+2k\pi}{n} = \frac{\varphi+2k\pi}{n} + 2q\pi,$$

odakle je (zbog periodičnosti kosinusa i sinusa i $q\in\mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} \cos\Big(\frac{\varphi+2m\pi}{n}\Big) &= \cos\Big(\frac{\varphi+2k\pi}{n} + 2q\pi\Big) = \cos\Big(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\Big), \\ \sin\Big(\frac{\varphi+2m\pi}{n}\Big) &= \sin\Big(\frac{\varphi+2k\pi}{n} + 2q\pi\Big) = \sin\Big(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\Big). \end{aligned}$$

Dakle, dovoljno je posmatrati familiju korenova:

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho}\cdot\Big(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\Big),\ k\in\{0,1,\cdots,n-1\}.$$

Dokažimo da $\omega_j \neq \omega_k$ za $j\neq k$. Pretpostavimo suprotno, da $\omega_j = \omega_k$ za neke $j\neq k$, $j,k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$. To znači da

$$\sqrt[n]{\rho}\cdot\Big(\cos\frac{\varphi+2j\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2j\pi}{n}\Big) = \sqrt[n]{\rho}\cdot\Big(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\Big),$$

odakle sledi da za proizvoljno $l\in\mathbb{Z}$ važi:

$$\frac{\varphi+2j\pi}{n} - \frac{\varphi+2k\pi}{n} = 2l\pi \Rightarrow \frac{2(j-k)\pi}{n} = 2l\pi \Rightarrow \frac{j-k}{n} = l.$$

S jedne strane, $\frac{j-k}{n}\in(0,1)$, dok je sa druge strane $\frac{j-k}{n} = l$ ceo broj, što je kontradikcija. Dakle, sva rešenja ω_k, $k = 0,1,\cdots,n-1$, su različita. □

Dakle, u skupu kompleksnih brojeva jednačina $z^n = a \neq 0$ ima tačno n različitih rešenja koja su data formulom:

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \Big(\cos \frac{\arg a + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg a + 2k\pi}{n} \Big), \ k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}.$$

Geometrijski gledano, svi $n-$ti korenovi broja $a \neq 0$ nalaze se u temenima pravilnog $n-$tougla upisanog u kružnicu poluprečnika $\sqrt[n]{|a|}$. Specijalno, $n-$ti korenovi jedinice (tj. rešenja jednačine $z^n = 1$):

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \ k \in \{0, 1, \cdots, n-1\},$$

nalaze se u temenima pravilnog $n-$tougla upisanog u jediničnu kružnicu tako da se jedno teme nalazi u tački $(1, 0)$, tj. $z_0 = 1 \in \mathbb{R}$. Sada iz mnogougla koji odgovara $\sqrt[n]{1}$ dobijamo mnogougao koji odgovara $\sqrt[n]{a}$ primenom homotetije s koeficijentom $\sqrt[n]{|a|}$, a zatim pomeranjem za ugao $\arg a$.

Eksponencijalni oblik kompleksnog broja

Ojlerova[2] formula je matematička formula kompleksne analize koja povezuje trigonometrijske funkcije i eksponencijanu funkciju sa kompleksnim izložiocem. Ona tvrdi da

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Pomenimo da je Ojlerova formula tačna za sve kompleksne brojeve.

Primenimo li Ojlerovu formulu na trigonometrijski oblik kompleksnog broja, dobijamo:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}.$$

Naravno, $\overline{z} = \rho e^{-i\varphi}$, a množenje, deljenje i stepenovanje kompleksnih brojeva izvode se na sledeći način:

- $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$,
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$, naravno $z_2 \neq 0$,
- $z^n = \rho^n e^{in\varphi}$.

Specijalan slučaj Ojlerove formule za $x = \pi$ je $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = 1$, odnosno

$$e^{i\pi} - 1 = 0,$$

i ova formula poseduje posebnu lepotu jer objedinjuje pet važnih matematičkih konstanti: 0 i 1 kao neutrale za sabiranje i množenje, i kao imaginarnu jedinicu, i transendentne brojeve e i π.

[2]Leonhard Euler (1707–1783), veliki švajcarski matematičar i fizičar

Primer 2.2.1. Naredni primeri pokazuju neke zanimljive osobine operacija nad kompleksnim brojevima.

1. Izračunajmo i^i. Prema Ojlerovoj formuli, za $x = \pi/2$ imamo $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Sada je
$$i^i = (e^{i\frac{\pi}{2}})^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}},$$
što je realan broj koji približno isnosi 0,207879576...

   Štaviše, za $x = \pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, po Ojlerovoj formuli imamo
$$i^i = (e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)})^i = e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi},$$
tj. broj i^i ima beskonačno mnogo realnih vrednosti.

2. Izraz
$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i\cdot i = i^2 = -1$$
je očigledno netačan, a greška je u tome što formula $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ važi samo za nenegativne realne brojeve a i b. Slična greška potkrala se i velikom Ojleru u knjizi objavljenoj 1770, kada je teorija kompleksnih brojeva bila još uvek mlada.

3. Predstavimo brojeve $1+\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i,\ -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i$ u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku. Moduo svakog od navedenih brojeva se lako nalazi: $\sqrt{(\pm 1)^2 + (\pm\sqrt{3})^2} = 2$. Potražimo nihove argumente. Broj $1+\sqrt{3}i$ nalazi se u prvom kvadrantu, pa je njegov argument $\arctan\sqrt{3} = \pi/3$. Broj $1-\sqrt{3}i$ je u četvrtom kvadrantu, pa je njegov argument $\arctan(-\sqrt{3}) + 2\pi = -\arctan\sqrt{3} + 2\pi = 5\pi/3$. Za broj $-1+\sqrt{3}i$ iz drugog kvadranta imamo $\arctan(-\sqrt{3}) + \pi = 2\pi/3$, dok za $-1-\sqrt{3}i$ imamo $\arctan\sqrt{3} + \pi = 4\pi/3$. Dakle,

   - $1+\sqrt{3}i = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$,
   - $-1+\sqrt{3}i = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$,
   - $-1-\sqrt{3}i = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$,
   - $1-\sqrt{3}i = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

Glava 3

Polinomi

Neka je $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ polje. Zbog asocijativnosti operacije $\cdot$, u polju se može definisati stepen elementa x na uobičajeni način:

$$(\forall x \in \mathbb{K})\ x^0 = 1,\ x^n = x \cdot x^{n-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Definicija 3.0.3. *Neka je* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *niz elemenata polja* $\mathbb{K}$ *takav da* $n = \max\{k : a_k \neq 0\}$. *Izraz*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

naziva se **algebarski**[1] **polinom** *stepena* n *po* x *nad poljem* $\mathbb{K}$. *Brojevi* $(a_k)_{k=\overline{0,n}}$ *nazivaju se* **koeficijentima** *polinoma* p. *Sa* $K[x]$ *označavaćemo skup svih polinoma sa koeficijetima iz polja* $\mathbb{K}$.

U opštem slučaju, polinomi se mogu posmatrati nad proizvoljnim prstenom sa jedinicom. Ukoliko zahtevamo da koeficijenti budu iz $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, dobijamo redom skup polinoma sa celobrojnim, racionalnim, realnim odnosno kompleksnim koeficijentima, u oznaci redom $Z[x]$, $Q[x]$, $R[x]$ i $C[x]$. Ako su u polinomu samo 1, 2 odnosno 3 sabirka različiti od nuli, onda je u pitanju **monom**, **binom** odnosno **trinom**.

Kada želimo da naglasimo da je polinom p stepena n, pisaćemo $p_n(x)$. Izraz $a_n x^n$ je **najstariji** ili **vodeći član**; dok su a_0 i a_n redom **slobodan član** i **najstariji** (odnosno, **vodeći**) **koeficijent**. Polinom čiji je najstariji koeficijent 1 je **moničan**.

[1]Pošto u ovom kursu izučavamo samo algebarske polinome, u nastavku koristimo samo termin polinom.

Primer 3.0.2. Izraz $p(x) = x^2 - \frac{1}{3}x + 4$ je polinom stepena 2 sa racionalnim koeficijentima redom $1, -\frac{1}{3}$ i 4. Ovaj polinom je moničan, jer je 1 koeficijent uz najstariji član x^2, dok je slobodni član 4. Ovaj polinom je takođe poznat kao kvadratni trinom.

Polinom čiji su svi koeficijenti jednaki nuli:

$$0(x) = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \ldots + 0 \cdot x + 0$$

naziva se **nula polinom**, u oznaci 0.

Definicija 3.0.4. *Neka je* $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in K[x]$ *i* $a \in \mathbb{K}$. *Tada je*

$$p(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k a^k$$

element polja $\mathbb{K}$ *koji se naziva* **vrednost polinoma** *u tački* $x = a$. *Polinomu* p *može se pridružiti funkcija* $f_p : \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$ *tako da*

$$(\forall a \in \mathbb{K})\ f_p(a) = p(a).$$

Funkcija f_p *naziva se* **polinomska funkcija** *pridružena polinomu* p.

Na beskonačnim poljima, kakva su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, polinom i polinomska funkcija mogu se poistovetiti.

Stepena funkcija, $st : K[x] \mapsto \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$, definiše se tako da je $st(p)$ jednako stepenu polinoma p. Sve konstante različite od nule su polinomi nultog stepena, dok se stavlja da je stepen nula polinoma $-\infty$. U literaturi se može naći i da se stepen nula polinoma ne definiše.

Definicija 3.0.5. *Polinomi* $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k x^k$ *i* $q(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$ *su jednaki akko su im jednaki nizovi koeficijenata:*

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow m = n \wedge a_k = b_k,\ k = \overline{0, n}.$$

Definicija 3.0.6. *Dati su polinomi* $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k x^k$ *i* $q(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$. *Tada* **zbir** *i* **proizvod** *polinoma* p *i* q *definišemo kao:*

1. $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} (a_k + b_k) x^k$, *gde* $p = \max\limits_{k \in \mathbb{N}} \{a_k + b_k \neq 0\}$;

2. $(pq)(x) = p(x)q(x) = \sum\limits_{k=0}^{m+n} c_k x^k$, *gde* $c_k = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

Polinom $(-p)(x) = -p(x) = \sum_{k=0}^{m}(-a_k)x^k$ *je* **suprotni polinom** *za* p.

Očigledno važi: $st(p+q) \leq \max\{st(p), st(q)\}$, $st(pq) = st(p) + st(q)$, $st(-p) = st(p)$. Jednakost u prvom izrazu važi kada $st(p) \neq st(q)$ ili kada $st(p) = st(q) = n$, ali $a_n + b_n \neq 0$.

Primer 3.0.3. Neka su dati polinomi $p(x) = x^3 - 3x + 5$ i $q(x) = -x^3 + 1$ nad poljem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Tada:

- $(p+q)(x) = -3x + 6$,
- $(pq)(x) = -x^6 + 3x^4 - 4x^3 - 3x + 5$,
- $(-q)(x) = x^3 - 1$.

Vidimo da važi: $st(pq) = 6 = st(p) \cdot st(q)$, $st(p+q) = 1 < st(p) + st(q) = 6$ i $st(-q) = st(q) = 3$.

3.1 Deljivost polinoma

Algebarski gledano, struktura $(K[x], +, \cdot)$, gde je $\mathbb{K}$ proizvoljan prsten sa jedinicom, je komutativni prsten sa jedinicom $p(x) = 1$. Međutim, u ovoj strukturi ne postoji operacija inverzna operaciji množenja polinoma, jer količnik dva polinoma ne mora da bude polinom. Zato se uvodi deljenje sa ostatkom, slično deljenju celih brojeva.

Teorema 3.1.1. *Za date polinome* $p, s \in K[x]$, $s \neq 0$, *postoje jedinstveni polinomi* $q, r \in K[x]$ *takvi da*

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x) \wedge st(r) < st(s).$$

Proof. Ako je $p(x) \equiv 0$, onda $q(x) = r(x) \equiv 0$, te je tvrđenje trivijalno. Neka je $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, $s(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$. Dokaz izvodimo indukcijom po stepenu n polinoma $p(x)$, za fiksirano $m = st(s)$. Ako je $n < m$, tada $p(x) = 0 \cdot s(x) + p(x)$; dakle $q(x) = 0$ i $r(x) = p(x)$ i $st(r) = st(p) = n < m = st(s)$, pa tvrđenje važi.

Pretpostavimo da je $n = N \geq m$ i da tvrđenje važi za $n < N$. Tada je

$$p_1(x) = p(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} s(x)$$

polinom stepena manjeg od n, pa za njega važi induktivna hipoteza: dakle, postoje polinomi $q_1(x)$ i $r_1(x)$ takvi da

$$p_1(x) = s(x)q_1(x) + r_1(x), \ st(r_1) < st(s).$$

Tada je $p(x) = s(x)\Big(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + q_1(x)\Big) + r_1(x) = s(x)q(x) + r(x)$, čime smo dokazali egzistenciju polinoma q i r (stavili smo da $r(x) = r_1(x)$ i $q(x) = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + q_1(x)$).

Dokaz jedinstvenosti: pretpostavimo da postoje dva razlaganja,

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x) = s(x)q_1(x) + r_1(x),\ 0 \le st(r), st(r_1) < st(s).$$

Tada $s(x)(q(x) - q_1(x)) = r_1(x) - r(x)$. Iz $st(r_1 - r) \le \max\{st(r), st(r_1)\} < st(s)$ sledi $st(s(q - q_1)) < st(s)$, odnosno $st(s) + st(q - q_1) < st(s)$. Dakle, $st(q - q_1) < 0$, što znači da $st(q - q_1) = -\infty$, tj. $q - q_1 = 0$. Odavde sledi $r = r_1$, čime smo dokazali jedinstvenost. □

Polinomi q i r čiji egzistenciju tvrdi prethodna teorema su redom **količnik** i **ostatak** pri deljenju polinoma p polinomom s.

Definicija 3.1.1. *Neka su dati polinomi $p, s \in K[x]$, $s \neq 0$. Polinom s deli polinom p, u oznaci $s|p$, akko $(\exists q \in K[x])\ s(x)q(x) = p(x)$.*

Primer 3.1.1. Pri deljenju polinoma $p(x) = 2x^3 - x$ i $s(x) = x^2 + 1$ dobija se količnik $q(x) = 2x$ i ostatak $r(x) = -3x$. Dakle,

$$2x^3 - x = 2x \cdot (x^2 + 1) + (-3x),\ 1 = st(-3x) < st(x^2 + 1) = 2.$$

Za razliku od relacije deljivosti na skupu prirodnih brojeva, relacija deljivosti na skupu polinoma nije relacije poretka.

Tvrđenje 3.1.1. *Za proizvoljne polinome $p, q, r \in K[x]$ važi:*

1. $p(x)|p(x)$;
2. $p(x)|q(x) \wedge q(x)|p(x) \Rightarrow p(x) = \alpha q(x)$ *za neko* $\alpha \in \mathbb{K}$;
3. $p(x)|q(x) \wedge q(x)|r(x) \Rightarrow p(x)|r(x)$.

Proof. Dokažimo samo 2. Iz $p(x)|q(x) \wedge q(x)|p(x)$ sledi postojanje $s_1(x),\ s_2(x)$ tako da $p(x) = s_1(x)q(x)$ i $q(x) = s_2(x)p(x)$, odakle je $p(x) = s_1(x)s_2(x)p(x)$, odnosno $s_1(x)s_2(x) = 1$. Kako $st(s_1) + st(s_2) = st(1) = 0$, sledi da su s_1 i s_2 konstantni nenula polinomi, što je i trebalo dokazati. □

Definicija 3.1.2. *Polinom $d(x)$ je* **zajednički delilac** *polinoma $p(x)$ i $q(x)$ ako $d(x)|p(x), q(x)$. Polinom $d(x)$ je* **najveći zajednički delilac**, *skraćeno $d(x) = NZD(p(x), q(x))$, ako je zajednički delilac za ova dva polinoma, i ako je deljiv sa svim ostalim njihovim zajedničkim deliocima.*

Ako je $d(x) = NZD(p(x), q(x))$, tada je i $\alpha d(x)$ takođe $NZD(p(x), q(x))$ za $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$; dakle, NZD polinoma je jedinstven do na množenje nenula konstantom. Polinomi p i q su **uzajamno prosti** ako $NZD(p, q) = 1$.

Teorema 3.1.2. *Za svaka dva polinoma postoji NZD, jedinstven do na multiplikativnu konstantu.*

3.1.1 Bezuov stav

Teorema 3.1.3 (Bezuov[2] stav)**.** *Polinom $p(x)$ je deljiv binomom $x - a$ ako i samo ako je $p(a) = 0$.*

Proof. Prema teoremi 3.1.1, postoje polinom $q(x)$ i ostatak $r(x)$ (koji je stepena najviše nula, jer $st(r) < st(x-a) = 1$; zato stavimo $r(x) = r$) tako da

$$p(x) = q(x)(x-a) + r.$$

Pritom je $p(a) = r$, pa je tvrđenje jasno. □

Definicija 3.1.3. *Broj a je* **nula** *(ili* **koren***)* **polinoma** *p ako $p(a) = 0$, odnosno $x - a | p(x)$.*

Nalaženje nula polinoma svodi se na rešavanje algebarske jednačine $p(x) = 0$. Tačno nalaženje nula polinoma u opštem slučaju nije moguće kada je stepen veći od 4; tada se koriste približni numerički metodi.

Posledica 3.1.1. *Polinom p je deljiv sa $x - a$ ako i samo ako je a nula polinoma p.*

3.2 Hornerova šema

Hornerova šema predstavlja efikasan metod za izračunavanje polinoma svođenjem na računski pogodniju monomijalnu formu. Naziv je dobila po Horneru[3], iako je za nju znao i kineski matematičar Đušao[4] još u XII veku.

Podelimo polinom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ monomom $x - a$, dobijamo količnik $q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$ i ostatak r stepena najviše nula.

$$\begin{aligned}
&a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \\
&= (x-a)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0) + r = \\
&= b_{n-1}x^{n-1} + (b_{n-2} - ab_{n-1})x^{n-2} + \ldots + (b_0 - ab_1)x + r - ab_0,
\end{aligned}$$

odakle, na osnovu jednakosti dva polinoma, sledi:

$$b_{n-1} = a_n,\ b_{n-1} = ab_{n-1} + a_{n-1},\ \ldots,\ b_0 = ab_1 + a_1,\ r = ab_0 + a_0.$$

Tablični prikaz odgovarajućih koeficijenata polinoma q_{n-1}:

[2]Étienne Bézout (1730–1783), francuski matematičar
[3]William George Horner (1786–1837), britanski matematičar
[4]Qin Jiushao (oko 1202-1261), kineski matematičar

a	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
	a_n	$ab_{n-1} + a_{n-1}$	$ab_{n-2} + a_{n-2}$	$\cdots$	$ab_1 + a_1$	$ab_0 + a_0$

Razlog zašto Hornerova šema radi je sledeći: ako zapišemo polinom u obliku

$$p_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + a_n x) \cdots)),$$

a zatim zamenimo koeficijente b_i, dobijamo

$$\begin{aligned} p_n(a) &= a_0 + a(a_1 + a(a_2 + \cdots + a(a_{n-1} + a_n a) \cdots) = \\ &= a_0 + a(a_1 + a(a_2 + \cdots + a(b_{n-1}) \cdots) = \\ &= \cdots \\ &= a_0 + a(b_1) = b_0. \end{aligned}$$

Ukoliko bi se računanje vrednosti polinoma $p(x)$ u tački $x = a$ izvodilo preko oblika $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, bilo bi potrebno $2n-1$ množenja i n sabiranja, dok je po Hornerovoj formuli dovoljno n množenja i n sabiranja. Dakle, računska efikasnost je očigledna.

Primer 3.2.1. Izračunaćemo vrednost polinoma $P(x) = 15z^4 - 13z^3 + 2z - 1$ u tački $z = 2$. Primenom Hornerove šeme, dobijamo:

2	15	-13	0	2	-1
	15	$2 \cdot 15 - 13 = 17$	$2 \cdot 17 + 0 = 34$	$2 \cdot 34 + 2 = 70$	$2 \cdot 70 - 1 = 139$

Znači, koeficijenti količnika su 15, 17, 34 i 70, a ostatak je 139. Dakle, $p(x) = (x-2)(15x^3 + 17x^2 + 34x + 70) + 139$, odnosno $p(2) = r = 139$.

3.3 Osnovna teorema algebre

Definicija 3.3.1. *Polje* $\mathbb{K}$ *je* **algebarski zatvoreno** *ako svaki polinom* $p(x) \in K[x]$ *različit od konstante ima bar jednu nulu u* $\mathbb{K}$.

Na primer, polje $\mathbb{Q}$ nije zatvoreno, jer polinom $p(x) = x - \sqrt{2}$ nema racionalnih korena, jer $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Ni polje $\mathbb{R}$ nije zatvroren, jer polinom $q(x) = x^2 + 1$ nema realnih nula. Međutim, u polju kompleksnih brojeva taj polinom ima dve nule, $+i$ i $-i$.

Teorema 3.3.1 (Osnovna teorema algebre)**.** *Svaki nekonstantan polinom sa kompleksnim koeficijentima ima barem jednu (kompleksnu) nulu.*

Dokaz ove teoreme izlazi izvan okvira ovog kursa.

Naredna teorema predstavlja rezultat analogan teoremi o jedinstvenoj faktorizaciji prirodnog broja na proste činioce.

Teorema 3.3.2. *Polinom $p(x) \in C[x]$ stepena $n > 0$ ima jedinstveno predstavljanje (do na redosled činilaca) u obliku*

$$p(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

gde $c \neq 0$ a $x_1, \ldots, x_n$ su (ne obavezno različiti) kompleksni brojevi.

Proof. Dokaz jedinstvenosti: pretpostavimo da postoje dva različita predstavljanja polinoma $p(x)$, gde $c, d \neq 0$ a $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ nule od $p(x)$:

$$p(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = d(x - y_1)(x - y_2) \cdots (x - y_n).$$

Iz jednakosti najstarijih članova sledi $c = d$. Ukoliko je $x_i = y_j$ za neke indekse i i j, tada možemo skratiti te članove, tako da ćemo bez umanjenja opštosti pretpostavljati da $x_i \neq y_j$ za sve indekse i, j. Sada $p(x_1) = 0$, dok $(x_1 - y_1)(x_1 - y_2) \cdots (x_1 - y_n) \neq 0$, što je kontradikcija.

Dokaz egzistencije ide indukcijom po n. Za $n = 1$ je rezultat očigledan. Pretpostavimo da tvrđenje važi za neko $n - 1 > 0$; tada polinom p stepena n, po teoremi 3.3.1, ima bar jednu kompleksnu nulu, recimo x_1. Po Bezuovom stavu, sledi da $p(x) = (x - x_1)q(x)$ za neki polinom q stepena $n - 1$. Po induktivnoj pretpostavci, za polinom q postoji jedinstvena faktorizacija $q(x) = c(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n)$, odakle $p(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$. □

Dakle, polinom stepena n ima najviše n kompleksnih nula.

Definicija 3.3.2. *Kažemo da je $a \in \mathbb{C}$* **nula polinoma** *$p(x) \in C[x]$* **reda (ili višestrukosti)** *$k \in \mathbb{N}$ ako*

$$(x - a)^k | p(x) \wedge (x - a)^{k+1} \nmid p(x).$$

Drugim rečima, a je nula polinoma p višestrukosti k ako postoji polinom $q(x) \in C[x]$ takav da je $p(x) = (x - a)^k q(x)$ i $q(a) \neq 0$. Za nulu višestrukosti $k = 1$ kažemo da je **jednostruka** *ili* **prosta**.

Primer 3.3.1. Kompleksni polinom $p(x) = x^3 + (1 - 2i)x^2 - (1 + 2i)x - 1$ ima prostu nulu $x = -1$ i nulu $x = i$ višestrukosti 2 (ili kako se još kaže, ima dvostruku nulu $x = i$).

Grupisanjem jednakih činilaca dobija se tzv. **kanonska reprezentacija** polinoma $p(x)$:

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x - x_k)^{\alpha_k},$$

gde su α_i višestrukosti korena x_i, $i = \overline{1, k}$, i važi $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n$. Jedinstvenost kanonske faktorizacije dokazuje se na sličan način kao u dokazu teorem 3.3.2.

Posledica 3.3.1. *Polinom stepena n ima tačno n kompleksnih nula (računajući i njihove višestrukosti).*

3.3.1 Vijetova pravila

Neka je dat polinom p_n sa realnim ili kompleksnim koeficijentima, čije su nule $x_1, \cdots, x_n$. Imamo:

$$\begin{aligned}
& p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)\cdots(x - x_n) = \\
= \; & a_n x^n + a_n x^{n-1}(-x_1 - x_2 - \cdots - x_n) + \\
& + a_n x^{n-2}(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n) + \cdots + a_n(-x_1)\cdots(-x_n) = \\
= \; & a_n x^n - a_n x^{n-1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + \\
& + a_n x^{n-2}(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n) + \cdots + (-1)^n a_n(x_1x_2\cdots x_n),
\end{aligned}$$

odakle sledi:

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= -a_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \\
a_{n-2} &= a_n(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n), \\
& \cdots \\
a_0 &= (-1)^n a_n x_1 x_2 \cdots x_n.
\end{aligned}$$

Izrazi:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\
x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\
& \cdots \\
x_1x_2\cdots x_k + \cdots + x_{n-k-1}x_{n-k-2}\cdots x_n &= (-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}, \\
& \cdots \\
x_1x_2\cdots x_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n},
\end{aligned}$$

nazivaju se **Vijetove**[5] **formule**.

Specijalno, za polinom drugog stepena $p_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ imamo

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}, \qquad x_1x_2 = \frac{a_0}{a_2};$$

dok za polinom trećeg stepena $p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ važi:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3}, \qquad x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}.$$

[5] François Viète (1540–1603), francuski matematičar

3.4 Polinomi sa realnim koeficijentima

Posmatramo **realne polinome**, odnosno polinome sa realnim koeficijentima. U opštem slučaju realan polinom ima kompleksne nule. Naredna teorema tvrdi da među kompleksnim nulama realnog polinoma postoji izvesna zavisnost.

Teorema 3.4.1. *Ako je x_k kompleksna nula reda α_k realnog polinoma p_n, tada je $\overline{x_k}$ (konjugovano) kompleksna nula reda α_k polinoma p_n.*

Proof. Očigledno je $\overline{p_n(x)} = p_n(\overline{x})$, zato što je konjugovanje saglasno sa sabiranjem i množenjem kompleksnih brojeva. Pretpostavimo da je $p_n(x) = a_n(x-x_1)^{\alpha_1}\cdots(x-x_k)^{\alpha_k}\cdots(x-x_l)^{\alpha_l}$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_l=n$ kanonska faktorizacija polinoma p_n. Imamo:

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= \overline{\overline{p_n(x)}} = \overline{p_n(\overline{x})} = \\
&= \overline{a_n(\overline{x}-x_1)^{\alpha_1}\cdots(\overline{x}-x_k)^{\alpha_k}\cdots(\overline{x}-x_l)^{\alpha_l}} = \\
&= \overline{a_n}\,\overline{(\overline{x}-x_1)^{\alpha_1}}\cdots\overline{(\overline{x}-x_k)^{\alpha_k}}\cdots\overline{(\overline{x}-x_l)^{\alpha_l}} = \\
&= a_n(\overline{\overline{x}}-\overline{x_1})^{\alpha_1}\cdots(\overline{\overline{x}}-\overline{x_k})^{\alpha_k}\cdots(\overline{\overline{x}}-\overline{x_l})^{\alpha_l} = \\
&= a_n(x-\overline{x_1})^{\alpha_1}\cdots(x-\overline{x_k})^{\alpha_k}\cdots(x-\overline{x_l})^{\alpha_l},
\end{aligned}
$$

odakle sledi da je $\overline{x_k}$ koren polinoma p_n reda α_k. □

Pošto se kompleksne nule javljaju isključivo u parovima, ukoliko je polinom neparnog stepena mora imati bar jednu realnu nulu.

Pretpostavimo da polinom $p_n(x)$ ima realne nule $x_1,\ldots,x_s$ (čije su višestrukosti redom $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$) i parove konjugovano kompleksnih nula $u_1\pm iv_1,\ldots,u_t\pm iv_t$ čije su višestrukosti redom $\beta_1,\ldots,\beta_t$; pritom važi $\alpha_1+\ldots+\alpha_s+2(\beta_1+\ldots+\beta_t)=n$. Tada prema teoremi o faktorizaciji imamo

$$
\begin{aligned}
&p_n(x) = a_n(x-x_1)^{\alpha_1}\cdots(x-x_s)^{\alpha_s}\cdot \\
&\cdot(x-(u_1+iv_1))^{\beta_1}(x-(u_1-iv_1))^{\beta_1}\cdots(x-(u_t+iv_t))^{\beta_t}(x-(u_t-iv_t))^{\beta_t}
\end{aligned}
$$

Kako se kompleksne nule javljaju u paru, imamo:

$$
\begin{aligned}
&(x-(u_1+iv_1))(x-(u_1-iv_1)) = ((x-u_1)-iv_1)((x-u_1)+iv_1) = \\
&= (x-u_1)^2+v_1^2 = x^2-2u_1x+u_1^2+v_1^2 = x^2+A_1x+B_1,
\end{aligned}
$$

gde $A_1^2-4B_1 = (-2u_1)^2-4(u_1^2+v_1^2) = -4v_1^2 < 0$. Dakle, polinom sa realnim koeficijentima može se predstaviti kao proizvod tzv. **ireducibilnih** ili **nesvodljivih** polinoma stepena 1 ili 2 koji se ne mogu faktorisati nad poljem realnih brojeva:

$$
p_n(x) = a_n(x-x_1)^{\alpha_1}\cdots(x-x_s)^{\alpha_s}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+p_tx-q_t)^{\beta_t},
$$

gde $n=\alpha_1+\cdots+\alpha_s+2(\beta_1+\cdots+\beta_t)$.

Primer 3.4.1. Polinom $p(x) = x^4 - x^3 - x + 1$ ima dvostruku realnu nulu $x = 1$, te se može predstaviti kao $p(x) = (x-1)^2(x^2+x+1)$. Polinom x^2+x+1 je nesvodljiv.

3.5 Polinomi sa celobrojnim koeficijentima

Tvrđenje 3.5.1. *Ako polinom sa celobrojnim koeficijentima ima celobrojnu nulu, onda ta nula deli slobodan član.*

Proof. Neka je $z \in \mathbb{Z}$ nula polinoma $p_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, gde $a_k \in \mathbb{Z},\ k = \overline{0,n}$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} 0 = p_n(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \\ &= z(a_n z^{n-1} + \cdots + a_2 z + a_1) + a_0, \end{aligned}$$

odakle sledi da $z|a_0$. □

Dakle, potencijalne nule polinoma $x^3 - 3x^2 - x + 3$ su ± 3 i ± 1. Proverom se zaključuje da su -1, 1 i 3 nule.

Tvrđenje 3.5.2. *Neka je $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ polinom sa celobrojnim koeficijentima, takav da $a_n, a_0 \neq 0$. Ako je $\frac{p}{q}$ (gde su p i q uzajamno prosti brojevi) nula polinoma $p(x)$, tada $p|a_0$ i $q|a_n$.*

Proof. Neka je $\frac{p}{q}$ nula polinoma $p(x)$; to znači da

$$0 = p\Big(\frac{p}{q}\Big) = a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0.$$

Množenjem sa q^n dobijamo:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0,$$

što možemo zapisati kao:

$$a_n p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}).$$

Kako q deli desnu stranu, mora da deli i levu, tj. $q|a_n p^n$, a kako su p i q uzajamno prosti, sledi $q|a_n$. Ako sada

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

zapišemo kao

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n,$$

pošto p deli levu stranu, mora da deli i desnu, tj. $p|a_0 q^n$. Brojevi p i q su uzajamno prosti, pa $p|a_0$. □

Primer 3.5.1. Posmatrajmo polinom $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5x - 2 = 0$. Prema prethodnom tvrđenju, potencijalni racionalni koreni $\frac{p}{q}$ su vrednosti $p| - 2$ i $q|3$, odnosno $p \in \{-2, -1, 1, 2\}$ i $q \in \{-3, -1, 1, 3\}$. Dakle, potencijalni koreni su

$$\frac{p}{q} \in \Big\{ -2, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 2 \Big\}.$$

Hornerovom šemom, ili na neki drugi način, proverava se koja od ovih vrednosti jeste koren jednačine (to je samo $\frac{2}{3}$).

3.6 Racionalne funkcije

Definicija 3.6.1. *Funkcija je* **racionalna** *ako je jednaka količniku dva polinoma:*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Ako je $st(P) < st(Q)$, *to je* **prava** *racionalna funkcija, dok je u slučaju* $st(P) \geq st(Q)$ **neprava**.

Polinome smatramo racionalnim funkcijama kod kojih je $Q(x) \equiv 1$. Oblast definisanosti racionalne funkcije je $\mathbb{R}$ bez nula polinoma $Q(x)$.

Za dve racionalne funkcije jednakost definišemo na sledeći način:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{T(x)} \Leftrightarrow P(x)T(x) = Q(x)S(x).$$

Tvrđenje 3.6.1. *Svaka neprava racionalna funkcija je zbir polinoma i prave racionalne funkcije.*

Proof. Neka je $\frac{P(x)}{Q(x)}$ neprava racionalna funkcija. Tada prema teoremi 3.1.1 postoje polinomi $S(x)$ i $T(x)$ takvi da

$$P(x) = Q(x)S(x) + T(x),\ st(T(x)) < st(Q(x)).$$

Odavde sledi:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)S(x) + T(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{T(x)}{Q(x)},\ st(T(x)) < st(Q(x)).$$

□

Definicija 3.6.2. *Racionalne funkcije*

$$x \mapsto \frac{A}{(x-a)^k}, \qquad x \mapsto \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k},\ k \in \mathbb{N},$$

gde su A, M, N, p, q *realne konstante takve da* $p^2 - 4q < 0$, *nazivaju se* **prosti** *ili* **parcijalni razlomci**.

Naš zadatak biće da svaku pravu racionalnu funkciju predstavimo u obliku sume prostih razlomaka.

Lema 3.6.1. *Neka je a realan koren višestrukosti k polinoma* $Q(x)$, *tj.*

$$Q(x) = (x-a)^k Q_1(x),\ Q_1(a) \neq 0.$$

Tada postoji jedinstveno razlaganje prave racionalne funkcije $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *u obliku*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x),} \tag{3.1}$$

gde je A_k *realna konstanta, a drugi sabirak prava racionalna funkcija.*

Proof. Ako važi (3.1), imamo $P(x) = A_k Q_1(x) + (x-a)P_1(x)$. Stavimo li $x = a$, dobijamo $P(a) = A_k Q_1(a)$, odnosno konstanta $A_k = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$ je jednoznačno određena. Sada lako dobijamo

$$P_1(x) = \frac{P(x) - A_k Q_1(x)}{x-a}.$$

Kako je $st(P_1(x)) = st(P(x) - A_k Q_1(x)) - 1 \leq max\{st(P(x)), st(Q_1(x))\} - 1 \leq st(Q(x)) - 2$, sledi da je drugi sabirak prava racionalna funkcija. □

Lema 3.6.2. *Neka je* x^2+px+q, $p^2-4q<0$, *faktor višestrukosti k polinoma* $Q(x)$, *tj.*

$$Q(x) = (x^2+px+q)^k Q_1(x),\ st(Q_1(x)) = st(Q(x)) - 2k.$$

Tada postoji jedinstveno razlaganje prave racionalne funkcije $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *u obliku*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_k x + N_k}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}, \tag{3.2}$$

gde su M_k, N_k *realne konstante, a drugi sabirak je takođe prava racionalna funkcija.*

Proof. Koreni kvadratnog trinoma x^2+px+q su, zbog $p^2-4q<0$, par konjugovano kompleksnih brojeva koje ćemo označiti sa $\alpha \pm i\beta$. Ako postoji (3.2), tada

$$P(x) = (M_k x + N_k)Q_1(x) + (x^2+px+q)P_1(x).$$

Stavljajući $x = a = \alpha + i\beta$ i $x = \overline{a} = \alpha - i\beta$, dobijamo

$$P(a) = (M_k a + N_k)Q_1(a),\ P(\overline{a}) = (M_k \overline{a} + N_k)Q_1(\overline{a}),$$

odakle dobijamo sistem:

$$M_k a + N_k = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = w, \quad M_k \overline{a} + N_k = \frac{P(\overline{a})}{Q_1(\overline{a})} = \overline{\left(\frac{P(a)}{Q(a)}\right)} = \overline{w},$$

čija su rešenja

$$M_k = \frac{Im(w)}{Im(a)}, \quad N_k = \frac{Im(a\overline{w})}{Im(a)}.$$

Zaista, ako oduzmemo drugu jednačinu sistema od prve, i iskoristimo

$$(\forall z \in \mathbb{C})\ z - \overline{z} = Rez + iImz - (Rez - iImz) = 2iImz,$$

dobijamo M_k. Ako od druge jednačine pomnožene sa a oduzmemo prvu pomnoženu sa $\overline{a}$, dobijamo $N_k(a - \overline{a}) = a\overline{w} - \overline{a}w = \overline{\overline{a}w}$, odakle se primenom $z - \overline{z} = 2iImz$ lako dobija N_k. Nije teško pokazati da je drugi sabirak u formuli prava racionalna funkcija. □

Pretpostavimo da polinom $Q(x)$ ima realne nule $x_1, \ldots, x_s$ višestrukosti redom $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ i parove konjugovano kompleksnih nula $u_1 \pm iv_1, \ldots, u_t \pm iv_t$ višestrukosti redom $\beta_1, \ldots, \beta_t$, pri čemu $\alpha_1 + \ldots + \alpha_s + 2(\beta_1 + \ldots + \beta_t) = st(Q(x))$. To, prema osnovnoj teoremi algebre, znači da

$$Q(x) = A(x - x_1)^{\alpha_1} \ldots (x - x_s)^{\alpha_s}(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \ldots (x^2 + p_t x + q_t)^{\beta_t}.$$

Na osnovu višestruke primene lema 3.6.1 i 3.6.2, faktoru $(x - x_k)^\alpha$ odgovara sabirak

$$\frac{A_1}{x - x_k} + \frac{A_2}{(x - x_k)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x - x_k)^\alpha} \equiv \sum_{j=1}^{\alpha} \frac{A_j}{(x - x_k)^j},$$

a faktoru $(x^2 + px + q)^\beta$ oblik

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_\beta x + N_\beta}{(x^2 + px + q)^\beta} \equiv \sum_{j=1}^{\beta} \frac{M_j x + N_j}{(x^2 + px + q)^j}.$$

Teorema 3.6.1. *Neka je* $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *prava racionalna funkcija, pri čemu se polinom u imeniocu može faktorisati kao*

$$Q(x) = A(x - x_1)^{\alpha_1} \ldots (x - x_s)^{\alpha_s}(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \ldots (x^2 + p_t x + q_t)^{\beta_t}.$$

Tada je

$$R(x) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{\alpha=1}^{\alpha_k} \frac{A_{\alpha,k}}{(x - x_k)^\alpha} + \sum_{l=1}^{t} \sum_{\beta=1}^{\beta_l} \frac{M_{\beta,l} x + N_{\beta,l}}{(x^2 + p_l x + q_l)^\beta},$$

gde se nepoznati koeficijenti $A_{\alpha,k}, M_{\beta,l}, N_{\beta,l}$ *mogu odrediti metodom neodređenih koeficijenata.*

Primer 3.6.1. Razložiti racionalnu funkciju $\frac{1}{x^6-2x^3+1}$. Ovo je prava racionalna funkcija, tako da prelazimo na faktorisanje polinoma $x^6 - 2x^3 + 1$. Ako primetimo da $x^6 - 2x^3 + 1 = (x^3 - 1)^2$, koristeći formulu za razliku kubova $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, lako dobijamo

$$x^6 - 2x^3 + 1 = (x - 1)^2(x^2 + x + 1)^2.$$

Sada imamo

$$\frac{1}{x^6 - 2x^3 + 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Ex + F}{(x^2 + x + 1)^2},$$

odnosno:

$$1 = A(x-1)(x^2+x+1)^2+B(x^2+x+1)^2+(Cx+D)(x-1)^2(x^2+x+1)+(Ex+F)(x-1)^2.$$

Sada ćemo do informacija o koeficijentima doći na malo drugačiji način: ispitivaćemo vrednosti polinoma u određenim tačkama gde se neki sabirci anuliraju.

- $x = 1 : 1 = 9B;$
- $x = 0 : 1 = -A + B + D + F;$
- $x = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{2}{3} = E + F + i(E - F)\sqrt{3};$
- $x = i : 1 = A - B + 2D + 2E + i(-A + 2C - 2F).$

Iz ovog sistema od šest jednačina nalazimo nepoznate koeficijente

$$A = -\frac{2}{9}, B = \frac{1}{9}, C = \frac{2}{9}, D = \frac{1}{3}, E = F = \frac{1}{3}.$$

Dakle,

$$\frac{1}{x^6 - 2x^3 + 1} = -\frac{2}{9(x - 1)} + \frac{1}{9(x - 1)^2} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{x + 1}{3(x^2 + x + 1)^2}.$$

Razlaganje racionalne funkcije u sumu prostih razlomaka koristi se, na primer, pri integraciji racionalnih funkcija.

Glava 4

Vektorski prostori

4.1 Aksiome vektorskog prostora

Definicija 4.1.1. *Neka je K dato polje.* **Vektorski** *ili* **linearni prostor nad poljem** K *je uređena četvorka* $(V, K, +, \cdot)$*, gde je* V *neprazan skup, a* $+ : V \times V \mapsto V$ *i* $\cdot : K \times V \mapsto V$ *preslikavanja takva da važe sledeće aksiome:*

(V1) $(\forall x, y \in V)\ x + y = y + x$;

(V2) $(\forall x, y, z \in V)\ x + (y + z) = (x + y) + z$;

(V3) $(\exists \mathbf{0} \in V)(\forall x \in V)\ x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x$;

(V4) $(\forall x \in V)(\exists (-x) \in V)\ x + (-x) = (-x) + x = \mathbf{0}$;

(V5) $(\forall x \in V)\ 1 \cdot x = x$, *(gde je 1 jedinica polja K);*

(V6) $(\forall x \in V)(\forall \alpha, \beta \in K)\ \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$;

(V7) $(\forall x, y \in V)(\forall \alpha \in K)\ \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;

(V8) $(\forall x \in V)(\forall \alpha, \beta \in K)\ (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$.

Elementi skupa V su **vektori***, a elementi polja K su* **skalari**. *Operacije $+$ i $\cdot$ su redom* **sabiranje vektora** *i* **množenje vektora skalarom***; često se zbirno nazivaju* **linearne operacije**. *Element $\mathbf{0} \in V$ čiju egzistenciju tvrdi aksioma V3 naziva se* **nula vektor***, dok je element $-x$ čiju egzistenciju tvrdi aksioma V4* **suprotan vektor** *vektora x.*

Prve četiri aksiome zajedno tvrde da je struktura $(V, +)$ Abelova grupa, dok preostale aksiome opisuju odnos između linearnih operacija i operacija u polju. Vektorske prostore obično označavamo velikim latiničnim slovima, vektore malim, a skalare malim slovima grčkog alfabeta.

Napomena: Ubuduće ćemo istim simbolom $+$ označavati i sabiranje u polju K i sabiranje vektora iz V, odnosno sa $\cdot$ množenje u polju K i množenje vektora iz V skalarom. Iz konteksta će biti jasno na koju operaciju se misli. Na primer, kod aksiome V6, simboli $\cdot$ na levoj strani odnose se na množenje vektora skalarom, dok prvo pojavljivanja simbola $\cdot$ na desnoj strani znači množenje u polju K. Zatim, kod aksiome V8, simbol $+$ na levoj strani je sabiranje u polju K, dok je $+$ na desnoj strani izraza sabranje dva vektora.

Vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ odnosno $\mathbb{C}$ je **realan** odnosno **kompleksan** vektorski prostor.

Primer 4.1.1. Ovde predstavljamo razne primere vektorskih prostora.

1. Počećemo od najmanjeg mogućeg vektorskog prostora. Od svih aksioma, jedino aksioma V3 tvrdi egzistenciju izvesnog vektora (aksioma V4 kaže da ako neki vektor pripada V, pripada i njemu suprotan vektor, dakle ima uslovni karakter). Dakle, neka je dat skup $V = \{\mathbf{0}\}$ i K proizvoljno polje; linearne operacije mogu se zadati samo kao $\mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$ i $(\forall \alpha \in K)\ \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Tada su aksiome trivijalno zadovoljene, te zaključujemo da je $(\mathbf{0}, K, +, \cdot)$ (trivijalan) vektorski prostor nad K.

2. Neka je $V = K$. Tada se linearne operacije svode na operacije u polju K, te se lako vidi da aksiome jesu zadovoljene. Dakle, **svako polje je vektorski prostor nad samim sobom**. Prema tome, $\mathbb{R}$ možemo posmatrati kao realan, a $\mathbb{C}$ kao kompleksan vektorski prostor.

3. Neka je dato polje K, i neka je $V = K^n$ tj. $V = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in K, i = \overline{1, n}\}$. Linearne operacije definišemo na sledeći način: za proizvoljne $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n) \in K^n$ i proizvoljno $\alpha \in K$ imamo
$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \\ \alpha(x_1, \ldots, x_n) &= (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n). \end{aligned}$$
Lako se proverava da je K^n vektorski prostor nad poljem K - on se naziva **koordinatni vektorski prostor nad** K. Nula vektor ovog prostora je element $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, a suprotan element vektora $x = (x_1, \ldots, x_n)$ je vektor $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$. Od posebne važnosti su prostori $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$.

4. Geometrijski vektori biće obrađivani posebno.

5. Posmatrajmo skup $K_n[t]$ svih polinoma po promenljivoj t stepena najviše n sa koeficijentima iz polja K. Za dva proizvoljna polinoma $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ i $q(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$ iz $K_n[t]$ i proizvoljan skalar α definišimo operacije:

$$\begin{aligned} (p+q)(t) &= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)t + \cdots + (a_n+b_n)t^n, \\ (\alpha p)(t) &= (\alpha a_0) + (\alpha a_1)t + \cdots + (\alpha a_n)t^n. \end{aligned}$$

   Lako se proverava da skup polinoma sa ovako definisanim linearnim operacijama predstavlja vektorski prostor polinoma nad poljem K.

6. Neka je V vektorski prostor nad poljem K i X neprazan skup. Posmatrajmo skup V^X svih preslikavanja iz X u V. Za preslikavanja $f, g \in V^X$ i skalar $\alpha \in K$ definišimo

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x). \end{aligned}$$

   Lako se pokazuje da je V^X vektorski prostor nad poljem K. Nula vektor u njemu je preslikavanje $(\forall x \in X)\ f_0(x) = \mathbf{0} \in V$, a suprotan vektor za $f \in V^X$ je vektor $-f$ definisan sa $(\forall x \in X)\ (-f)(x) = -f(x)$.

4.1.1 Osobine vektorskih prostora

Tvrđenje 4.1.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem K. Tada*

1. *Nula vektor je jedinstven.*
2. *Za svaki vektor $x \in V$ suprotan vektor $-x$ je jedinstven.*
3. $(\forall x \in V)(\forall \alpha \in K)\ 0x = \mathbf{0}$ *i* $\alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
4. *Ako* $\alpha x = \mathbf{0}$, *onda* $\alpha = 0$ *ili* $x = \mathbf{0}$.
5. $(\forall x \in V)(\forall \alpha \in K)\ (-1)x = -x$ *i* $(-\alpha x) = -(\alpha x)$.

Proof. 1. Pretpostavimo da postoje dva nula vektora, $\mathbf{0_1}$ i $\mathbf{0_2}$. Prema aksiomama V3 i V1, imamo

$$\mathbf{0_1} \overset{(V3)}{=} \mathbf{0_1} + \mathbf{0_2} \overset{(V1)}{=} \mathbf{0_2} + \mathbf{0_1} \overset{(V3)}{=} \mathbf{0_2}.$$

2. Pretpostavimo da za dati vektor x postoje dva suprotna vektora a i b, tj. da $x + a = \mathbf{0} = x + b$. Tada

$$a = a + \mathbf{0} = a + (x+b) = (a+x) + b = (x+a) + b = \mathbf{0} + b = b.$$

3. Polazeći od $0 \cdot x = (0+0) \cdot x \overset{(V8)}{=} 0 \cdot x + 0 \cdot x$, dodavanjem $-(0 \cdot x)$ levoj i desnoj strani dobijamo $-(0 \cdot x) + 0 \cdot x = -(0 \cdot x) + (0 \cdot x + 0 \cdot x)$. Koristeći aksiomu A2, jedinstvenost suprotnog vektora i $(\forall v \in V)\ v + (-v) = \mathbf{0}$, dobijamo $\mathbf{0} = \mathbf{0} + 0 \cdot x = 0 \cdot x$.

   Polazeći od $\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) \overset{(V7)}{=} \alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0}$, dodavanjem $-(\alpha \cdot \mathbf{0})$ levoj i desnoj strani i korišćenjem aksiome V2, osobine suprotnog vektora, dobija se $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0}$, odnosno $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

4. Ako je $\alpha = 0$, tvrđenje je već dokazano. Pretpostavimo zato da $\alpha \neq 0$. Tada postoji $\alpha^{-1} \in K$ i važi:

$$x = 1 \cdot x = (\alpha \cdot \alpha^{-1}) \cdot x = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

5. Za $\alpha \in K$, iz $\alpha \cdot x + (-\alpha) \cdot x \overset{(V8)}{=} (\alpha + (-\alpha)) \cdot x = 0 \cdot x = \mathbf{0}$ i jedinstvenosti suprotnog vektora sledi da $(-\alpha) \cdot x = -\alpha \cdot x$. Specijalno za $\alpha = 1$ sledi prvi deo tvrđenja.

□

4.2 Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Pod terminom **sistem** vektora (ili skalara) podrazumevaćemo konačan niz vektora (ili skalara) među kojima, za razliku od skupa, može biti i jednakih. Na primer, $\{x_1, x_2, x_1, x_2, x_2\}$ je sistem, a $\{x_1, x_2\}$ skup vektora.

Definicija 4.2.1. *Neka je $(x) : x_1, \ldots, x_n$ konačan sistem vektora iz vektorskog prostora V nad poljem K i $(\alpha) : \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ konačan sistem skalara iz polja K. Vektor*

$$y = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

je **linearna kombinacija** *vektora $x_1, \ldots, x_n$ sa skalarima $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Kaže se još i da se vektor y može izraziti preko vektora sistema (x). Ako je bar jedan skalar $\alpha_i \neq 0 \in K$, $i = \overline{1,n}$, tada je linearna kombinacija* **netrivijalna**, *u suprotnom je* **trivijalna**.

Primer 4.2.1. Neka je $(x) : x_1 = (1,1),\ x_2 = (-1,2),\ x_3 = (0,1)$ sistem vektora iz $\mathbb{R}^2$ i $(\alpha) : \alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = 3$ sistem skalara iz $\mathbb{R}$. Vektor:

$$y = 2 \cdot (1,1) + (-1) \cdot (-1,2) + 3 \cdot (0,1) = (3,3)$$

je, dakle, izražen kao linearna kombinacija vektora sistema (x) sa skalarima sistema (α). Kako su svi skalari različiti od nule, u pitanju je netrivijalna linearna kombinacija.

Definicija 4.2.2. *Konačan sistem vektora* $(x) : x_1, \ldots, x_n$ *vektorskog prostora* V *je* **linearno zavisan** *ako je bar jedan njegov vektor linearna kombinacija ostalih vektora; u suprotnom, sistem je* **linearno nezavisan**. *Prazan sistem vektora je po definiciji linearno nezavisan.*

Primer 4.2.2. Sistem vektora $(1,0),\ (0,2),\ (-3,4)$ je linearno zavisan, jer $(-3,4) = -3\cdot(1,0)+2\cdot(0,2)$. Sistem vektora $(1,0),\ (0,2),\ (0,0)$ je linearno zavisan, jer $(0,0) = 0\cdot(1,0)+0\cdot(0,2)$.

Tvrđenje 4.2.1. *Neka je dat konačan sistem vektora vektorskog prostora* V.

1. *Ako sistem sadrži nula vektor, tada je on linearno zavisan.*

2. *Ako sistem sadrži dva ista vektora, on je linearno zavisan.*

3. *Ako je neki podsistem datog sistema linearno zavisan, tada je i ceo sistem linearno zavisan.*

4. *Ako je sistem linearno nezavisan, tada je i svaki njegov podsistem linearno nezavisan.*

Proof. Neka je $(x) : x_1, \ldots, x_n$ sistem vektora iz V.

1. Pretpostavimo da nula vektor pripada sistemu, tj. $(x) : \mathbf{0}, x_2, \ldots, x_n$, tada $\mathbf{0} = 0\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n$, odnosno sistem je linearno zavisan.

2. Pretpostavimo da sistem sadrži dvaput vektor y, tj. $(x) : y, y, x_3, \ldots, x_n$ i pošto $y = 1\cdot y + 0\cdot x_3 + \cdots + 0\cdot x_n$, sledi da je sistem linearno zavisan.

3. Neka je $x_1, \ldots, x_k$ linearno zavisan podsistem sistema (x); to znači da postoje skalari $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ takvi da $x_1 = \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k$. Kako je ovo isto što i $x_1 = \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k + 0\cdot x_{k+1} + \ldots + 0\cdot x_n$, sledi da je ceo sistem (x) linearno zavisan.

□

Teorema 4.2.1. *Sistem vektora* $(x) : x_1, \ldots, x_n$ *prostora* V *je linearno zavisan ako i samo ako se nula vektor može prikazati kao netrivijalna linearna kombinacija vektora tog sistema.*

Proof. ($\Rightarrow$): Pretpostavimo da je sistem (x) linearno zavisan; to znači da se recimo x_n može prikazati kao linearna kombinacija ostalih:

$$x_n = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1}.$$

Tada je $\mathbf{0}$ netrivijalna kombinacija vektora sistema, jer

$$\mathbf{0} = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + (-1) x_n.$$

($\Leftarrow$): Neka je $\mathbf{0} = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, gde je neki od skalara različit od nule, recimo α_n. Tada postoji $\alpha_n^{-1} \in K$, te dobijamo

$$x_n = -\alpha_n^{-1}\alpha_1 x_1 - \cdots - \alpha_n^{-1}\alpha_{n-1} x_{n-1},$$

što i znači linearnu zavisnost sistema (x). □

Posledica 4.2.1. *Sistem $(x) : x_1, \ldots, x_n$ vektora iz V je linearno nezavisan akko*

$$(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \mathbf{0}) \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Primer 4.2.3.

1. Pokažimo da su u prostoru $\mathbb{R}$ svaka dva vektora linearno zavisni. Neka su x i y dva vektora (realna broja). Ako je jedan od njih 0, tada su očigledno linearno zavisni. Ako recimo $x \neq 0$, tada $y = (yx^{-1}) \cdot x$, dakle-jesu linearno zavisni.

2. Vektori $p(t) = t$ i $q(t) = 2t$ iz prostora polinoma sa realnim koeficijentima su linearno zavisni, jer $q(t) = 2 \cdot p(t)$.

3. Posmatrajmo prostor $\mathbb{R}^2$, i ispitajmo linearnu nezavisnost vektora $(a, 0)$ i $(0, b)$, gde $a, b \neq 0$. Za neke skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ imamo:

   $$(0,0) = \alpha \cdot (a,0) + \beta \cdot (0,b) = (\alpha a, \beta b) \Rightarrow \alpha a = 0,\ \beta b = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

   Dakle, pomenuti vekori su linearno nezavisni.

4.3 Baza vektorskog prostora

Definicija 4.3.1. *Sistem vektora prostora V je* **potpun u** *V ako se svaki vektor iz V može predstaviti kao linearna kombinacija vektora tog sistema.*

Na primer, sistem vektora $(1,0), (0,1), (-1,1)$ je potpun u prostoru $\mathbb{R}^2$, jer se proizvoljan vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ može predstaviti kao linearna kombinacija (štaviše, na bar dva načina):

$$(x,y) = 2x \cdot (1,0) + (y-x) \cdot (0,1) + x \cdot (-1,1) = x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1) + 0 \cdot (-1,1).$$

Među svim potpunim sistemima, od posebnog interesa su oni koji su u izvesnom smislu najmanji.

Definicija 4.3.2. *Svaki potpun linearno nezavisan sistem vektora vektorskog prostora V naziva se* **baza** *ili* **Hamelova**[1] **baza** *prostora V. Prostor je* **konačnodimenzionalan** *ako ima bar jednu bazu sastavljenu od konačno mnogo vektora; u suprotnom je* **beskonačnodimenzionalan**.

Tvrđenje 4.3.1. *Svaki konačan potpun sistem vektora datog prostora sadrži bazu tog prostora.*

Proof. Neka je $(v) : v_1, \ldots, v_n$ potpun sistem vektora iz V. Ako je on i linearno nezavisan, onda je (v) baza. Ako je linearno zavisan, onda se recimo vektor v_n može izraziti kao linearna kombinacija ostalih vektora iz sistema (v). Ako iz sistema (v) izbacimo taj vektor v_n, dobijeni sistem je još uvek potpun; ako je i linearno nezavisan on je baza, a ako nije ponavljamo proceduru sve dok se (v) ne svede na linearno nezavisan podsistem tj. bazu prostora V. $\square$

Tvrđenje 4.3.2. *Svaki linearno nezavisan skup vektora može se dopuniti do baze prostora. Drugim rečima, svaki vektorski prostor ima bazu.*

Može se dokazati da sve baze datog prostora imaju istu kardinalnost.

Definicija 4.3.3. *Kardinalnost proizvoljne baze vektorskog prostora V naziva se* **dimenzija prostora** *V, u oznaci* $\dim V$.

Koristan rezultat je naredna posledica.

Posledica 4.3.1. *Ako je* $\dim V = n$ *i ako je sistem (v) sastavljen iz n vektora linearno nezavisan, tada je (v) jedna baza prostora V.*

Izaberimo jednu bazu $(e) : e_1, \ldots, e_n$ vektorskog prostora V dimenzije n. Tada se proizvoljan vektor $x \in V$ može **na jedinstven način** predstaviti kao linearna kombinacija vektora baze:

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Skalari $x_1, \ldots, x_n$ u gornjem zapisu su **koordinate** vektora x u odnosu na bazu (e). To zapisujemo i kao

$$x = \{x_1, \ldots, x_n\}_{(e)},$$

ili samo $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, kad se zna o kojoj bazi je reč.

[1] Georg Karl Wilhelm Hamel (1877–1954), nemački matematičar

Primer 4.3.1. Pokazaćemo neke od baza vektorskih prostora iz primera 4.1.1.

1. Smatramo da trivijalan vektorski prostor $V = \{\mathbf{0}\}$ ima dimenziju 0.

2. Polje K kao vektorski prostor ima za bazu bilo koji nenula element, te je dimenzije 1. Dakle, $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$ su dimenzije 1. Međutim, prostor $\mathbb{C}$ nad poljem $\mathbb{R}$ je dimenzije 2, jer je jedna njegova baza $\{1, i\}$.

3. Prostor $\mathbb{R}^3$ je dimenzije 3, a među njegovim bazama poseban značaj ima tzv. **kanonska** (ili standardna) **baza**:

$$(e) : e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1).$$

   Značaj kanonske baze je u tome što su komponente vektora jednake sa koordinatama vektora u ovoj bazi:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot (1, 0, 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0) + x_3 \cdot (0, 0, 1) = \{x_1, x_2, x_3\}_{(e)}.$$

   Slično važi za prostor $\mathbb{R}^n$, kanonsku bazu čine vektori $e_i,\ i = \overline{1, n}$, koji su u stvari uređenje $n-$torke koje imaju jedinicu na mestu i a na ostalim mestima nule.

4. Prostor polinoma $K_n[t]$ ima **kanonsku bazu**:

$$(e) :\ 1,\ t,\ t^2, \ldots, t^n,$$

   što znači da je dimenzije $n + 1$. Značaj ove baze je zbog jednakosti koeficijenata polinoma i koordinata polinoma u ovoj bazi:

$$p(t) = at^2 + bt + c = a \cdot t^2 + b \cdot t + c \cdot 1 = \{a, b, c\}_{(e)}.$$

4.4 Potprostori vektorskog prostora

Definicija 4.4.1. *Podskup P vektorskog prostora V nad poljem K je* **vektorski potprostor** *od V, u oznaci $P \leq V$, ako je i sam vektorski prostor u odnosu na restrikcije linearnih operacija na P.*

Tvrđenje 4.4.1. *Podskup P prostora V je potprostor od V ako i samo ako:*

i) $(\forall x, y \in P)\ x + y \in P$;

ii) $(\forall x \in P)(\forall \alpha \in K)\ \alpha x \in P$.

Ova dva uslova iz prethodnog tvrđenja mogu se zameniti sa

$$(\forall x, y \in P)(\forall \alpha, \beta \in K)\ \alpha a + \beta b \in K.$$

Osobina ii) za $\alpha = 0 \in K$ tvrdi da $\mathbf{0} \in P$, što zajedno sa osobinom i) znači da ako $x \in P$, onda mora da bude i $-x \in P$. Prema tome, prvi kriterijum da li je nešto potprostor je ispitivanje da li sarži nula vektor i da li sadrži sve suprotne elemente.

Primer 4.4.1. Navodimo neke važne primere vektorskih potprostora.

1. Svaki prostor V ima bar dva potprostora, $\{\mathbf{0}\}$ i V, i to su tzv. trivijalni potprostori.

2. Ako je K polje, i $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da $m \leq n$, tada je K^m potprostor od K^n. Ovo postaje jasno kad se vektor $x = (x_1, \ldots, x_m) \in K^m$ identifikuje sa vektorom $x = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in K^n$.

Neka je $M \neq \emptyset$ podskup prostora V nad poljem K. Posmatrajmo skup $\mathcal{L}(M)$ svih konačnih linearnih kombinacija vektora skupa M sa skalarima polja K:

$$\mathcal{L}(M) = \{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k : x_1, \ldots, x_k \in M,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K,\ k = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Lako se proverava da je $\mathcal{L}(M)$ najmanji vektorski potprostor od V koji sadrži skup M; on se naziva **linearno zatvorenje skupa** M ili **lineal nad skupom** M. Po definiciji se uzima $\mathcal{L}(\emptyset) = \mathbf{0}$.

Teorema 4.4.1. *Ako je P podskup konačnodimenzionalnog prostora V, tada je i on konačnodimenzionalan, i važi* $\dim P \leq \dim V$.

Proof. Ako je P jedan od trivijalnih prostora, nema se šta dokazivati. Pretpostavimo da P nije trivijalan, i neka $\mathbf{0} \neq v_1 \in P$. Ako je $\mathcal{L}(v_1) = P$ dokaz je gotov, u suprotnom se traži nenula vektor v_2 koji je linearno nezavisan sa v_1. Ako je $P = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ imamo dokaz, u suprotnom se nastavlja procedura, sve dok ne nađemo skup vektora koji razapinju P. Dužina takvog sistema ne može biti veća od $\dim V$, te zato $\dim P \leq \dim V$. $\square$

Posledica 4.4.1. *Ako je V konačne dimenzije i P potprostor od V takav da* $\dim P = \dim V$, *tada* $P = V$.

4.5 Geometrijski vektori

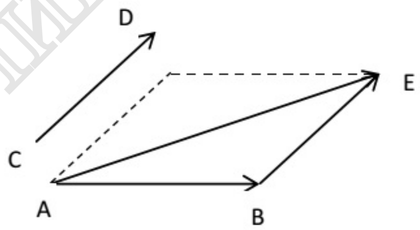
Neka su u prostoru date tačke A i B koje određuju duž AB. Ukoliko tačku A proglasimo početnom, a tačku B krajnjom tačkom te duži, uveli smo orijentaciju duži. Uređeni par tačaka (A, B) naziva se **orijentisana duž** ili **vezani vektor**, u oznaci $\overrightarrow{AB}$. Rastojanje od A do B je **intenzitet vektora**, u oznaci $|\overrightarrow{AB}|$, dok se prava na kojoj leži vektor naziva **pravac**. Ukoliko $A = B$, tada je reč o **nula vektoru**, $\vec{0}$; njegov intenzitet je 0, dok pravac i smer nisu određeni. Vektor intenziteta 1 naziva se **jedinični vektor** ili **ort**.

Dve orijentisane duži, $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$, su ekvivalentne ako su obe nula vektori, ili ako su istog intenziteta, pravca i smera. Lako se pokazuje da je ovo relacija ekvivalencije u skupu orijentisanih duži. Klasa ekvivalencije ove relacije naziva se **slobodni vektor** ili kraće - **vektor**. Skup svih vektora označavaćemo sa V.

Sabiranje geometrijskih vektora

Sabiranje geometrijskih vektora obavlja se po **pravilu paralelograma**. Ako su data dva vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$, tada se među svim vektorima iz klase ekvivalencije vektora $\overrightarrow{CD}$ uzima onaj čiji je početak tačka B (a vrh tačka E), a onda se po pravilu paralelograma dobija da je

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}.$$



Tvrđenje 4.5.1. *Skup V u odnosu na sabiranje vektora je Abelova grupa.*

Proof. Kako je zbir dva vektora ponovo vektor, struktura je grupoid. Komutativnost i asocijativnost se lako dokazuju (skica: paralelogram odnosno trapez). Nula vektor je neutral za sabiranje, dok iz $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ sledi da je $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ suprotni vektor za vektor $\overrightarrow{AB}$. □

Geometrijske vektore ćemo obeležavati ili kao vektor kod kojeg su istaknute početna i krajnja tačka (npr. $\overrightarrow{AB}$), ili malim latiničnim slovima (npr. $\vec{x}$).

Razlika vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$ definiše se kao $\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y})$.

Množenje vektora skalarom

Neka je $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\vec{x} \in V$. Tada je $\alpha\vec{x}$ vektor čiji je intenzitet jednak $|\alpha||\vec{x}|$, pravac isti kao i pravac vektora $\vec{x}$, a smer isti kao smer vektora $\vec{x}$ ako $\alpha > 0$, odnosno suprotan ako $\alpha < 0$.

Teorema 4.5.1. *Skup geometrijskih vektora je realan vektorski prostor.*

Proof. Kako je, prema tvrđenju 4.5.1 $(V, +)$ Abelova grupa, preostaje da se dokaže da važe aksiome 5-8 vektorskog prostora.

(5) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ po definiciji množenja skalarom.

(6) Dokažimo $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$. Ako $\alpha = 0$ ili $\beta = 0$ ili $\vec{x} = \vec{0}$ jednakost važi. Sada razlikujemo slučajeve:

- Ako su α i β istog znaka, tada su vektori $\alpha(\beta\vec{x})$ i $(\alpha\beta)\vec{x}$ istog pravca i smera kao vektor $\vec{x}$;
- Ako su α i β suprotnih znakova, tada su vektori $\alpha(\beta\vec{x})$ i $(\alpha\beta)\vec{x}$ istog pravca ali suprotnog smera u odnosu na vektor $\vec{x}$;

u oba slučaja:

$$|\alpha(\beta\vec{x})| = |\alpha||\beta\vec{x}| = |\alpha|(|\beta||\vec{x}|) = |\alpha||\beta||\vec{x}| = |\alpha\beta||\vec{x}| = |(\alpha\beta)\vec{x}|.$$

Dakle, vektori su jednaki, pa važi aksioma 6.

(7) Dokažimo $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$. Neka je prvo $\alpha > 0$. Posmatrajmo trouglove $\triangle OAB$ (gde $\overrightarrow{OA} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{y}$) i $\triangle OA_1B_1$ (gde $\overrightarrow{OA_1} = \alpha\vec{x}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \alpha\vec{y}$). Pošto imamo

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \alpha,$$

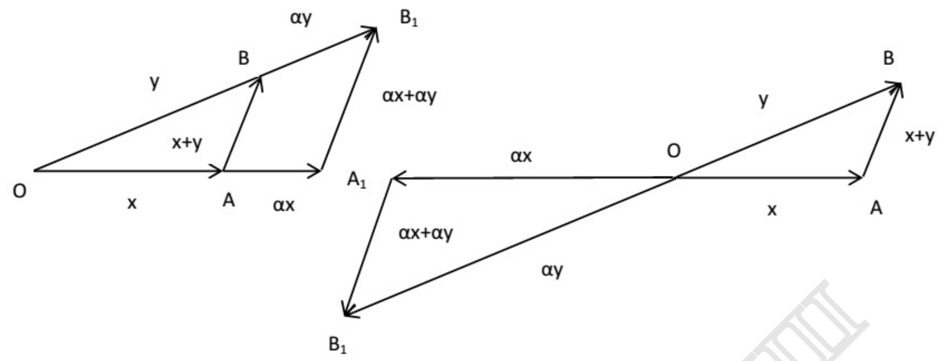
i kako $\angle OAB = \angle OA_1B_1$ (kao saglasni uglovi nad transferzalom iste prave), prema stavu SUS o sličnosti trouglova sledi $\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1$. Odavde sledi da $\angle AOB = \angle A_1OB_1$, što znači da su tačke O, B i B_1 na istoj pravoj u rasporedu $O - B - B_1$. Iz sličnosti sledi i da

$$\frac{OB_1}{OB} = \frac{OA_1}{OA} = \alpha,$$

odnosno $\overrightarrow{OB_1} = \alpha\overrightarrow{OB}$, tj.

$$\alpha\vec{x} + \alpha\vec{y} = \alpha(\vec{x} + \vec{y}).$$

Ako je $\alpha < 0$ dokazuje se na sličan način.



(8) Dokažimo $(\alpha+\beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$. Slučaj kada $\alpha = 0$ ili $\beta = 0$ ili $x = \vec{0}$ je trivijalan, tako da nadalje pretpostavljamo da $\alpha, \beta \neq 0$ i $x \neq \vec{0}$. Posmatraćemo 4 različita slučaja, u zavisnosti od znaka skalara.

i) Ako $\alpha, \beta > 0$, tada su vektori $\alpha\vec{x}, \alpha\vec{y}$ i $(\alpha+\beta)\vec{x}$ istog pravca i smera kao $\vec{x}$, dok za intenzitet važi

$$\begin{aligned} |(\alpha+\beta)\vec{x}| &= |\alpha+\beta||\vec{x}| = (\alpha+\beta)|\vec{x}| = (|\alpha|+|\beta|)|\vec{x}| = \\ &= |\alpha||\vec{x}| + |\beta||\vec{x}| = |\alpha\vec{x}| + |\beta\vec{x}|. \end{aligned}$$

ii) Za $\alpha, \beta < 0$ dokazuje se analogno kao u i).

iii) Neka su α, β različitih znakova, ali takvi da $\alpha+\beta > 0$. Tada se α može zapisati kao zbir dva pozitivna skalara: $\alpha = (\alpha+\beta)+(-\beta)$, pa se može primeniti i):

$$\alpha\vec{x} = ((\alpha+\beta)+(-\beta))\vec{x} = (\alpha+\beta)\vec{x} + (=\beta)\vec{x} = (\alpha+\beta)\vec{x} - \beta\vec{x}.$$

iv) Ako su α, β različitih znakova, ali takvi da $\alpha+\beta < 0$, tada se β može zapisati kao zbir dva negativna skalara: $\beta = (\alpha+\beta)+(-\alpha)$, a onda se primeni ii).

Dakle, $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ je vektorski prostor. □

Linearna (ne)zavisnost geometrijskih vektora

Podsetimo se nekih termina.

Definicija 4.5.1. *Vektori $\vec{x}, \vec{y} \in V$ su*

- **kolinearni** *ako imaju isti pravac, tj. ako su paralelni;*

- **komplanarni** *ako leže u istoj ravni, tj. ako su paralelni istoj ravni.*

Tvrđenje 4.5.2. *Za geometrijske vektore važi:*

1. *Dva geometrijska vektora su linearno zavisna akko su kolinearni.*
2. *Tri geometrijska vektora su linearno zavisna akko su komplanarni.*
3. *Proizvoljna tri (četiri) vektora u ravni (prostoru) su linearno zavisna.*

Proof. 1. Neka su $\vec{x}, \vec{y}$ linearno zavisni vektori; to znači da je $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=\vec{0}$, gde je bar jedan od skalara $\alpha, \beta \neq 0$. Neka $\alpha \neq 0$, tada $\vec{x} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{y}$, tj. vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$ su istog pravca - kolinearni su.

Obratno, vektori $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ su kolinearni ako su njihovi ortovi istog pravca:

$$\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \pm\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}.$$

Sada imamo

$$\frac{1}{|\vec{x}|}\vec{x} + \frac{\mp 1}{|\vec{y}|}\vec{y} = \vec{0},$$

odnosno

$$\vec{x} = \pm\frac{|\vec{x}|}{|\vec{y}|}\vec{y}.$$

Ako je bar jedan od vektora nula vektor, trivijalno su linearno zavisni.

2. Neka su $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ linearno zavisni vektori; to znači da je $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}+\gamma\vec{z}=\vec{0}$, gde je bar jedan od skalara $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$. Neka $\alpha \neq 0$, tada $\vec{x} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{y} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{z}$, tj. vektor $\vec{x}$ se nalazi u ravni određenoj vektorima $-\frac{\beta}{\alpha}\vec{y}$ i $-\frac{\gamma}{\alpha}\vec{z}$, što znači da su $\vec{x}, \vec{y}$ i $\vec{z}$ komplanarni.

Obratno, neka su $\vec{x} = \overrightarrow{OX}, \vec{y} = \overrightarrow{OY}$ i $\vec{z} = \overrightarrow{OZ}$ komplanarni vektori. Ako među njima ima kolinearnih, dokaz je gotov. Pretpostavimo sada da $\vec{x}$ i $\vec{y}$ nisu kolinearni; oni tada određuju ravan OXY kojoj pripada i vektor $\vec{z}$. Neka su X_1 i Y_1 preseci pravih koje prolaze kroz Z i paralelne su sa OY i OX, redom. Tada $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OX_1} + \overrightarrow{OY_1}$. Kako je $\overrightarrow{OX_1} = \alpha\vec{x}$ i $\overrightarrow{OY_1} = \beta\vec{y}$ za neke α, β, sledi $\vec{z} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$, što znači linearnu zavisnost.

3. Ovaj deo dokazuje se analogno drugom delu u 2.

□

Tvrđenje 4.5.3. *U vektorskom prostoru geometrijskih vektora na pravoj/ u ravni/ u prostoru bazu čini proizvoljan nenula vektor/ proizvoljna dva nekolinearna vektora/ proizvoljna tri nekomplanarna vektora.*

Dakle, prostor geometrijskih vektora je dimenizije 3, dok su njegovi potprostori nula vektor (dimenzije 0), prave kroz koordinatni početak (dimenzije 1), ravni kroz koordinatni početak (dimenzije 2) i naravno ceo prostor V.

Glava 5

Matrice i determinante

5.1 Matrice

Definicija 5.1.1. *Neka je K dato polje i $m, n \in \mathbb{N}$. Proizvoljno preslikavanje $A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \mapsto K$ naziva se* **matrica tipa** $m \times n$ **nad poljem** K*. Za $(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ umesto $A(i, j)$ piše se a_{ij}.*

Elementi a_{ij} organizuju se u pravougaonu šemu od m horizontalnih redova (tzv. **vrste**) i n vertikalnih redova (tzv. **kolone**):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

Element a_{ij} nalazi se u preseku $i-$te vrste i $j-$te kolone. Matricu A čiji su elementi a_{ij}, gde $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, označavaćemo sa

$$A = [a_{i,j}]_{m \times n}.$$

Skup svih matrica tipa $m \times n$ nad poljem K označavaćemo sa $\mathcal{M}(m \times n, K)$. Ukoliko je $m = n$, tada je matrica **kvadratna reda** n, a skup takvih matrica označavamo sa $\mathcal{M}(n, K)$.

Definicija 5.1.2. *Dve matrice $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ nad istim poljem K su* **jednake** *akko $m = p$, $n = q$ i $a_{ij} = b_{ij}$, za sve $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.*

Matrica tipa $m \times n$ čiji su svi elementi $0 \in K$ naziva se **nula matrica**, i označava sa $\mathbf{0}_{m \times n}$, ili samo $\mathbf{0}$ ako je jasno iz konteksta kog je tipa. Matrica tipa $1 \times n$ je **matrica-vrsta**, a matrica tipa $m \times 1$ je **matrica-kolona**. U kvadratnoj matrici $A = [a_{ij}]$ tipa n elementi sa jednakim indeksima (dakle,

$a_{ii},\ i = \overline{1,n})$ čine **glavnu dijagonalu**. Ukoliko matrica tip n sadrži nenula elemente samo na glavnoj dijagonali, tada je to **dijagonalna matrica**; ukoliko su svi takvi elementi jednaki 1, tada je to **jedinična matrica** koja se obično označava sa E_n ili I_n. Kvadratna matrica koja ima ispod (iznad) glavne dijagonale sve elemente jednake nuli je **gornje (donje) trougaona matrica**.

Primer 5.1.1. 1. Matrica

$$A = \begin{bmatrix} e & 1 & -2 \\ \pi & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix},$$

je (pravougaona) matrica tipa 2×3 nad poljem $\mathbb{R}$; dakle, $A \in \mathcal{M}(2 \times 3, \mathbb{R})$. Njenu prvu vrstu čine elementi $a_{11} = e,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = -2$, a treću kolonu $a_{13} = -2,\ a_{23} = 0$. Znači, matrica-vrsta je npr. $[e\ 1\ -2]$, a matrica kolona $[e\ \pi]^T$.

2. Matrica
$$B = \begin{bmatrix} i-1 & 0 & \pi \\ \frac{3}{4} & -\sqrt{2} & i+1 \\ -1,1 & 0 & i \end{bmatrix},$$
je kvadratna matrica reda 3 nad poljem $\mathbb{C}$; dakle, $B \in \mathcal{M}(3, \mathbb{C})$. Glavnu dijagonalu ove matrice čine elementi $a_{11} = i - 1,\ a_{22} = -\sqrt{2},\ a_{33} = i$.

3. Matrice
$$C = \begin{bmatrix} i-1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
su obe dijagonalne, a matrica I_3 je još i jedinična. Jedinična matrica se može opisati i pomoću Kronekerovog delta-simbola,
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$
kao $I_n = [\delta_{ij}]_{i,j=1}^n$.

4. Matrice
$$D_1 = \begin{bmatrix} i-1 & 0 & \pi \\ 0 & -\sqrt{2} & i+1 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} i-1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\sqrt{2} & 0 \\ -1,1 & 0 & i \end{bmatrix},$$
su redom gornje (ili desno) odnosno donje (ili levo) trougaona matrica.

Na skupu matrica može se definisati preslikavanje:

$$T : \mathcal{M}(m \times n, K) \mapsto \mathcal{M}(n \times m, K),\ T([a_{ij}]) = [a_{ji}],$$

koje vrši zamenu mesta vrstama i kolonama matrice A. Umesto $T(A)$ obično se piše A^T, i A^T je **transponovana matrica** matrice A.

Kvadratna matrica A je **simetrična** ako $A = A^T$ (tj. $a_{ij} = a_{ji},\ i, j = \overline{1, n}$), odnosno **antisimetrična** ako $A = -A^T$.

Ukoliko je matrica nad poljem $\mathbb{C}$, za $A \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{C})$ može se definisiati matrica $\overline{A}$ tako što se svaki njen element zameni konjugovano-kompleksnim brojem. Stavlja se $A^* = (\overline{A})^T$. Kvadratna kompleksna matrica je **ermitska** ako $A = A^*$, odnosno **kosoermitska** ako $A^* = -A$.

Linearne operacije nad matricama

Definicija 5.1.3. *Neka su* $A = [a_{ij}],\ B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ *i* $\alpha \in K$. *Tada* **sabiranje matrica** *i* **množenje matrica skalarom** *definišemo kao:*

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}],\ \alpha A = [\alpha a_{ij}].$$

Lako se pokazuje da za proizvoljne matrice $A, B, C \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ i skalare $\alpha, \beta \in K$ važi:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$, gde je $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{m\times n}$ nula matrica;
4. $(\exists(-A) \in \mathcal{M}(m \times n, K))\ A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}$;
5. $1 \cdot x = x$, (gde je 1 jedinica polja K);
6. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Drugim rečima,

Tvrđenje 5.1.1. *Skup* $\mathcal{M}(m \times n, K)$ *je vektorski prostor nad poljem* K *u odnosu na gore definisane linearne operacije.*

Kasnije ćemo pokazati da $\dim \mathcal{M}(m \times n, K) = mn$ i da je posebno važna kanonska baza sastavljena od mn matrica tipa $m \times n$ koje imaju 1 na tačno jednom mestu, a na ostalima 0.

5.2 Linearni operatori

Ukoliko se posmatraju funkcije koje slikaju vektorske prostore (dakle, strukture znatno bogatije osobinama od običnih skupova), i pritom zadovoljavaju još neke uslove, možemo definisati važnu klasu funkcija.

Definicija 5.2.1. *Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori nad istim poljem skalara K. Preslikavanje $f : V_1 \mapsto V_2$ je* **linearno** *ili* **homomorfizam** *ako*

1. $(\forall x, y \in V_1)\ f(x + y) = f(x) + f(y)$, **aditivnost**;
2. $(\forall x \in V_1)(\forall \alpha \in K)\ f(\alpha x) = \alpha f(x)$, **homogenost**.

Često se ova dva uslova zamenjuju **uslovom linearnosti***:*

$$(\forall x, y \in V_1)(\forall \alpha, \beta \in K)\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Terminološka napomena: preslikavanje iz jednog vektorskog prostora u drugi često se naziva **operator**; takvo preslikavanje koje je aditivno i homogeno naziva se **linearan operator**. Skup svih linearnih operatora iz prostora V_1 u prostor V_2 označavamo sa $L(V_1, V_2)$.

Homomorfizam f koji je injektivan/ surjektivan/ bijektivan naziva se **monomorfizam/ epimorfizam/ izomorfizam**. Izomorfizam prostora V_1 u V_1 naziva se **automorfizam**.

Ponekad ćemo, umesto $A(x)$ pisati samo Ax.

Primer 5.2.1. Neka su V, V_1 i V_2 su vektorski prostori nad poljem K.

1. Operator $A : V_1 \mapsto V_2$ koji svaki vektor iz V_1 slika u nula-vektor iz V_2, naziva se **nula-operator** i označava sa $\mathbf{0}$. Dakle,

$$\mathbf{0} : V_1 \mapsto V_2,\ (\forall x \in V_1)\ \mathbf{0}(x) = \mathbf{0}_{V_2} \in V_2.$$

2. **Identički operator** slika V u sebe na sledeći način:

$$I : V \mapsto V,\ (\forall x \in V)\ I(x) = x.$$

3. **Skalarni operator** (ili **operator homotetije**) **sa koeficijentom** $\lambda \in K$ definiše se kao:

$$A : V \mapsto V,\ (\forall x \in V)\ A(x) = \lambda x.$$

Ovaj operator je linearan, jer za sve $x, y \in V$ i $\alpha \in K$:

$$\begin{aligned} A(x + y) &= \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y = A(x) + A(y) \\ A(\alpha x) &= \lambda(\alpha x) = \alpha(\lambda x) = \alpha A(x). \end{aligned}$$

Specijalno, za $\lambda = 0$ dobijamo nula-operator koji slika V u V, a za $\lambda = 1$ identički.

4. Posmatrajmo preslikavanje $R_\varphi \in L(\mathbb{R}^2)$, definisano na sledeći način:
$$R_\varphi(x_1, x_2) = (\cos\varphi \cdot x_1 - \sin\varphi \cdot x_2,\ \sin\varphi \cdot x_1 + \cos\varphi \cdot x_2).$$
Lako se pokazuje da je ovo preslikavanje linearan operator, i geometrijski predstavlja **rotaciju oko koordinatnog početka za ugao** φ.

5. Za dati vektor $\vec{0} \neq a \in \mathbb{R}^2$, preslikavanje $\tau_a \in L(\mathbb{R}^2)$, definisano sa
$$(\forall x \in \mathbb{R}^2)\ \tau_a(x) = x + a,$$
naziva se **translacija u ravni za vektor** a. Ovo preslikavanje nije ni homogeno (jer za proizvoljno nenula λ važi $\tau_a(\lambda x) = \lambda x + a \neq \lambda(x+a) = \lambda\tau_a(x)$), ni aditivno (jer $\tau_a(x+y) = x + y + a \neq (x+a) + (y+a) = \tau_a(x) + \tau_a(y)$), te prema tome nije ni linearan operator.

Tvrđenje 5.2.1. *Za linearan operator $A : V_1 \mapsto V_2$ važi: $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.*

Proof. Za proizvoljno $x \in V_1$ važi $A(\mathbf{0}) = A(0 \cdot x) = 0 \cdot A(x) = \mathbf{0}$. □

Definicija 5.2.2. *Za $A, B \in L(V_1, V_2)$ definišemo:*

1. **zbir operatora** *kao $(A + B)(x) = A(x) + B(x)$;*

2. **množenje operatora skalarom** *kao $(\lambda A)(x) = \lambda A(x)$.*

Preslikavanja iz prethodne definicije su očigledno linearni operatori iz $L(V_1, V_2)$.

Definicija 5.2.3. Proizvod operatora *$B \in L(V_1, V_2)$ i $A \in L(V_2, V_3)$ je operator*
$$(AB)(x) = A(B(x)).$$

Preslikavanje AB je linearan operator iz skupa $L(V_1, V_3)$.

Tvrđenje 5.2.2. *Skup svih linearnih operatora $L(V_1, V_2)$ je vektorski prostor nad poljem K u odnosu na sabiranje operatora i množenje operatora skalarom.*

Tvrđenje 5.2.3. *Prostori $\mathcal{M}(m \times n, K)$ i K^{mn} su izomorfni.*

Proof. Posmatrajmo preslikavanje $\varphi : \mathcal{M}(m \times n, K) \mapsto K^{mn}$ definisano na sledeći način:
$$\varphi(A) = [a_{11}\ \ldots\ a_{1n}\ a_{21}\ \ldots\ a_{2n}\ \ldots\ a_{m1}\ \ldots\ a_{mn}],$$

gde je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

Slikovito govoreći, preslikavanje φ matrici pridružuje vektor koji se dobija kad se vrste te matrice "zalepe" jedna za drugu. Ovo preslikavanje je, očigledno, bijektivno; da je homomorfizam sledi na osnovu linearnih operacija nad vektorima i matricama. Dakle, φ je traženi izomorfizam. $\Box$

Na osnovu ovog tvrđenja zaključujemo da $\dim \mathcal{M}(m\times n, K) = mn$, i - još važnije - polazeći od kanonske baze prostora K^{mn} lako dobijamo kanonsku bazu za prostor pravougaonih matrica. Pokazaćemo to na primeru prostora $\mathbb{R}^6 \cong \mathcal{M}(2\times 3, \mathbb{R})$. Kanonska baza prostora $\mathbb{R}^6$ sastavljena je od vektora

$$e_1 = (1,0,0,0,0,0),\ e_2 = (0,1,0,0,0,0),\ e_3 = (0,0,1,0,0,0),$$
$$e_4 = (0,0,0,1,0,0),\ e_5 = (0,0,0,0,1,0),\ e_6 = (0,0,0,0,0,1).$$

Primenjujući preslikavanje φ^{-1}, dobijamo kanonsku bazu za $\mathcal{M}(2\times 3, \mathbb{R})$:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ M_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.3 Matrica linearnog operatora

Neka su X i Y vektorski prostori čije su dimenzije konačne, $\dim X = n$ i $\dim Y = m$. Neka su $\mathcal{B}_X = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $\mathcal{B}_Y = \{f_1, \dots, f_m\}$ Hamelove baze u prostorima X i Y, redom. Neka je dat linearan operator $A : X \mapsto Y$ takav da $Ax = y \in Y$ za $x \in X$.

Kako vektor x pripada prostoru X, on se jednoznačno može razložiti po bazi prostora X:

$$(\exists! x_1, \dots, x_n \in K)\ x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Na osnovu definicije operatora ($y = Ax$) dobijamo:

$$y = Ax = A(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 A(e_1) + \dots + x_n A(e_n).$$

Dakle, sliku vektora x znaćemo ako znamo sliku svakog vektora baze $\mathcal{B}_X$. Kako je $e_1 \in X$, onda je $A(e_1)$ element prostora Y, pa se može razložiti po bazi $\{f_1, \ldots, f_m\}$ prostora Y:

$$(\exists! a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1} \in K)\ A(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \ldots + a_{m1}f_m.$$

Analogno, imamo:

$$\begin{gathered}(\exists! a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2} \in K)\ A(e_2) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \ldots + a_{m2}f_m,\\ \ldots\\ (\exists! a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn} \in K)\ A(e_n) = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \ldots + a_{mn}f_m.\end{gathered}$$

Skalare iz gornjeg razlaganja vektora $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ po bazi $\mathcal{B}_Y$ možemo pregledno organizovati u matricu tako da koordinate slike prvog vektora baze budu u prvoj koloni, itd:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

Ovu matricu uglavnom označavamo istim slovom kao i sam operator kome ona odgovara, pošto ona predstavlja **matricu operatora** $A \in L(X,Y)$ **u odnosu na baze** $\mathcal{B}_X$ **i** $\mathcal{B}_Y$.

Sada s jedne strane imamo: $y = y_1f_1 + \ldots + y_mf_m$, a sa druge

$$\begin{aligned} y &= x_1A(e_1) + x_2A(e_2) + \ldots + x_nA(e_n) = \\ &= x_1(a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \ldots + a_{m1}f_m) + x_2(a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \ldots + a_{m2}f_m) + \\ &\quad + \ldots + x_n(a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \ldots + a_{mn}f_m) = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)f_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)f_2 + \\ &\quad + \ldots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n)f_m. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem dobijamo:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n. \end{aligned}$$

Sada dejstvo operatora A možemo matrično predstaviti kao:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = Ax.$$

Dakle, **svakom linearnom operatoru $A \in L(V_1, V_2)$ odgovara jedinstvena matrica u odnosu na fiksirane baze u prostorima V_1 i V_2** i obratno: **proizvoljnom matricom jedinstveno je određen linearni operator**.

Na ovaj način uspostavili smo bijektivnu vezu (štaviše, izomorfizam!) između matrice A_f iz prostora $\mathcal{M}(m \times n, K)$ i linearnog operatora f iz $L(V_1, V_2)$ (gde $\dim V_1 = n,\ \dim V_2 = m$).

Primer 5.3.1. Neka su V, V_1, V_2 vektorski prostori nad poljem K.

1. Potražimo matricu skalarnog operatora $A_\lambda \in L(V)$. Kako je

   $$A(e_k) = \lambda e_k = 0 \cdot e_1 + \ldots + 0 \cdot e_{k-1} + \lambda \cdot e_k + 0 \cdot e_{k+1} + \ldots + 0 \cdot e_n,\ k = \overline{1, n},$$

   sledi da $k-$ta kolona matrice operatora sadrži λ na mestu k i nule na svim ostalim mestima. Prema tome,

   $$A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{n \times n} = \lambda I_n,$$

   to jest matrica operatora A_λ je dijagonalna. Kako za $\lambda = 0$ dobijamo nula operator, a za $\lambda = 1$ jedinični, odavde lako dobijamo da je matrica nula operatora nula matrica odgovarajuće dimenzije, a matrica jediničnog operatora je matrica I_n.

2. Matricu operatora R_φ dobijamo kada slike baze (a kanonska baza za $\mathbb{R}^2$ sastavljena je od vektora $e_1 = (1, 0)$ i $e_2 = (0, 1)$):

   $$R_\varphi(e_1) = R_\varphi(1, 0) = (\cos\varphi,\ \sin\varphi), R_\varphi(e_2) = R_\varphi(0, 1) = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi),$$

   poređamo po kolonama matrice tipa 2×2 :

   $$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

5.3.1 Operacije sa matricama operatora

Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori dimenzija n i m redom, i $A, B \in L(X, Y)$ linearni operatori kojima odgovaraju matrice

$$A = [a_{ij}]_{m \times n},\ B = [b_{ij}]_{m \times n}.$$

Posmatrajmo operator $C = A + B$. Označimo njegovu matricu sa $C = [c_{ij}]_{m\times n}$. Tada imamo:

$$c_{ij} = \{Ce_j\}_i = \{(A+B)e_j\}_i = \{Ae_j + Be_j\}_i = \{Ae_j\}_i + \{Be_j\}_i = a_{ij} + b_{ij},$$

gde smo sa $\{Ce_j\}_i$ označili skalar koji se nalazi na $i-$tom mestu vektora Ce_j. Dakle, $C = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$. Vidimo da je ovako definisano sabiranje u saglasnosti sa ranije definisanim sabiranjem matrica.

Posmatrajmo sada operator $C = \lambda A$. Za njegovu matricu važi:

$$c_{ij} = \{Ce_j\}_i = \{(\lambda A)e_j\}_i = \lambda\{Ae_j\}_i = \lambda c_{ij},$$

to jeste $C = [c_i] = [\lambda a_{ij}]$, što je saglasno sa ranije uvedenim množenjem matrice skalarom.

Množenje matrica

Neka su V_1, V_2, V_3 vektorski prostori nad poljem K čije su baze redom $\mathcal{B}_{V_1} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathcal{B}_{V_2} = \{f_1, \dots, f_m\}$ i $\mathcal{B}_{V_3} = \{g_1, \dots, g_p\}$. Neka su dati operatori $B \in L(V_1, V_2)$ i $A \in L(V_2, V_3)$ kojima, u odnosu na odgovarajuće baze, odgovaraju matrice $A = [a_{ij}]_{p\times m}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Posmatrajmo operator $C = AB \in L(V_1, V_3)$ kome odgovara matrica $C = [c_{ij}]_{p\times n}$. Potražićemo vezu između komponenti matrica A, B i C.

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= \{Ce_j\}_i = \{A(Be_j)\}_i = \{A(b_{1j}f_1 + b_{2j}f_2 + \cdots + b_{mj}f_m)\}_i = \\
&= \{b_{1j}Af_1 + b_{2j}Af_2 + \cdots + b_{mj}Af_m\}_i = \\
&= \{b_{1j}(a_{11}g_1 + a_{21}g_2 + \cdots + a_{p1}g_p) + b_{2j}(a_{12}g_1 + a_{22}g_2 + \cdots + a_{p2}g_p) + \\
&\quad + \cdots + b_{mj}(a_{1m}g_1 + a_{2m}g_2 + \cdots + a_{pm}g_p)\}_i = \\
&= \{(a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \cdots + a_{1m}b_{mj})g_1 + (a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \cdots + a_{2m}b_{mj})g_2 + \\
&\quad + \cdots + (a_{p1}b_{1j} + a_{p2}b_{2j} + \cdots + a_{pm}b_{mj})g_p\}_i = \\
&= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.
\end{aligned}$$

Definicija 5.3.1. *Neka su date matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ i $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}(n \times p, K)$.* **Proizvod matrica A i B, tim redom, u oznaci AB, je matrica** *$C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}(m \times p, K)$ čiji su elementi određeni sa*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}.$$

Da bi množenje matrica imalo smisla, broj kolona prve matrice mora biti jednak broju vrsta druge matrice.

Posmatrajmo, na primer, matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}, \ B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}_{3\times 4}.$$

Njihov proizvod je matrica tipa 2×4. Odredimo element koji se u matrici proizvoda nalazi na preseku druge vrste i treće kolone:

$$c_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & a_{34} \end{bmatrix} = a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{23}a_{33}.$$

S druge strane, proizvod matrica B i A nije definisan, jer nisu odgovarajućih tipova, tj. broj kolona prve matrice nije jednak broju vrsta druge.

Primer 5.3.2. Posmatrajmo operator $R = R_{\pi/2}$ definisan kao u 5.3.1.2). Njegova matrica je

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica operatora R^2 dobija se množenjem matrica za R:

$$R^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I_2,$$

odnosno kompozicija dve rotacije za ugao $\frac{\pi}{2}$ je osna simetrija u odnosu na pravu normalnu na početni položaj tačke.

Tvrđenje 5.3.1. *Za množenje matrica važe sledeće osobine:*

1. $A(BC) = (AB)C$, *(asocijativnost);*

2. $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$, *(distributivnost);*

3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, $\lambda \in K$;

4. $(AB)^T = B^T A^T$;

5. *Ako* $K = \mathbb{C}$, *važi* $(AB)^* = B^* A^*$.

Proof. Neka $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(m \times n, K), B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}(n \times p, K)$ i $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}(p \times q, K)$ za neke $m, n, p, q \in \mathbb{N}$.

1. Dokažimo asocijativnost; kako su matrice $A(BC)$ i $(AB)C$ istog tipa $m \times q$, dovoljno je dokazati da se njihovi elementi na odgovarajućim pozicijama poklapaju.

$$\begin{aligned}
[A(BC)]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}[BC]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Big(\sum_{l=1}^{m} b_{kl}c_{lj}\Big) = \\
&= \sum_{l=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\Big)c_{lj} = \sum_{l=1}^{m}(AB)_{il}c_{lj} = [(AB)C]_{ij}.
\end{aligned}$$

4. Za matricu $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, transponovana matrica je $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$. Sada $[B^T A^T]_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{jk}a_{ki}$. S druge strane, $[AB]_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, pa je

$$[(AB)^T]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{k=1}^{n}[A]_{jk}[B]_{ki} = \sum_{k=1}^{n}[B^T]_{ik}[A^T]_{kj} = [B^T A^T]_{ij}.$$

□

Množenje matrica u opštem slučaju **nije komutativno**, štavise - ako postoji proizvod AB to ne povlači ni postojanje proizvoda BA, a kamo li njihovu jednakost.

Posmatrajmo sada skup $\mathcal{M}(n, K)$ svih kvadratnih matrica nad poljem K. Sada postoje proizvodi proizvoljne dve matrice iz $\mathcal{M}(n, K)$, što zajedno sa gornjim tvrđenjem znači da je to nekomutativni prsten sa jedinicom I_n.

U strukturi $\mathcal{M}(n, K)$ može se definisati **stepen matrice** na sledeći način:

$$A^0 = I_n,\ A^n = AA^{n-1},\ (n \in \mathbb{N}).$$

Ovo dalje znači da možemo definisati i **matrični polinom**

$$p(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_k A^k,\ A \in \mathcal{M}(n, K),$$

pridružen polinomu $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_k t^k$, gde $a_0, \ldots, a_k \in K$.

Lako se proverava da $A^m A^n = A^{m+n}$, $(A^m)^n = A^{mn}$, ali $(AB)^n \neq A^n B^n$ u opštem slučaju (m, n su prirodni brojevi).

Primer 5.3.3. Neka su dati polinom $p(t) = t^2 - 1$ i matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Matrični polinom $p(A)$ računamo na sledeći način:

$$p(A) = A^2 - I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.4 Inverz matrice (I deo)

Među kvadratnim matricama po značaju se ističe jedan podskup.

Definicija 5.4.1. *Kvadratna matrica* $A \in \mathcal{M}(n, K)$ *je* **regularna** *ili* **invertibilna** *ako postoji matrica* $B \in \mathcal{M}(n, K)$ *takva da*

$$AB = BA = I_n.$$

Takva matrica B *je jedinstvena-naziva se* **inverzna matrica matrice** A *i označava sa* A^{-1}. *Matrica koja nije regularna je* **singularna**.

Tvrđenje 5.4.1. *Za matrice* $A, B \in \mathcal{M}(n, K)$ *važi:*

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. *Ako su* A, B *invertibilne, takve su i* AB *i* BA, *i* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
3. *Ako je* A *invertibilna matrica, takva je i* A^T *i* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Proof. 1. Neposredno iz definicije.

2. Pošto je $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$, i $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$, sledi da je $B^{-1}A^{-1}$ inverzna matrica matrice AB, što znači da je matrica AB regularna. Ostatak analogno.
3. Iz $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$ i $(A^{-1})^TA^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n$ sledi da je $(A^T)^{-1}$ inverz od A^T, pa je A^T regularna matrica.

$\square$

Izračunavanje inverza matrice odložićemo dok ne uvedemo determinante. Sada dajemo jedan važan primer invertibilnih matrica.

5.5 Determinante

Podsećanje: pod permutacijom konačnog skupa $X \neq \emptyset$ podrazumevamo bijektivno preslikavanje skupa X u sebe. Ako skup X ima n elemenata, tj. $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, tada skup svih permutacija skupa X označavamo sa S_n, i on u algebarskom smislu predstavlja grupu. Svaka permutacija skupa X može se predstaviti kao $p(1)p(2)\ldots p(n)$. Ukoliko u permutaciji veći broj stoji isped manjeg (ne samo neposredno ispred!), kažemo da oni čine **inverziju**. Broj inverzija permutacije p označava se sa $inv(p)$. Na primer, za skup $X = \{1, 2, 3\}$ jedna permutacija je $p = (3, 1, 2)$, i $inv(p) = 2$ pošto je 3 ispred 1 i 3 ispred 2. U zavisnosti od parnosti $inv(p)$ određujemo parnost permutacije.

Definicija 5.5.1. *Preslikavanje* $\det_n : \mathcal{M}(n, K) \mapsto K$ *koje matrici* $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(n, K)$ *pridružuje skalar*

$$\sum_p (-1)^{inv(p)} a_{1,p(1)} a_{2,p(2)} \dots a_{n,p(n)}$$

naziva se **determinanta** $n-$**tog reda**, *skalar* $\det_n(A)$ *je* **determinanta matrice** A. *Gornja suma se uzima po svim permutacijama* $p \in S_n$.

Oznaka za determinantu matrice A je $\det A$ ili

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Elementi matrice A su **elementi determinante**, sabirci gornje sume su **članovi determinante**.

Primer 5.5.1. Pokazaćemo kako se izračunavaju determinante za $n = 1, 2, 3$.

1. Za $n = 1$ trivijalno imamo $\det A = |a_{11}| = a_{11}$.

2. Za $n = 1$ imamo ukupno 2! sabiraka
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. Za $n = 3$ imamo ukupno 3! sabiraka. Za računanje determinante reda 3 (i isključivo za determinante reda 3) koristi se Sarusovo[1] pravilo:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

4. Ukoliko je matrica dijagonalna, njena determinanta jednaka je proizvodu elemenata po glavnoj dijagonali, jer su svi ostali sabirci jednaki nuli. Specijalno, $\det I_n = 1$.

5. Iz sličnih razloga determinanta gornje/donje trougaone matrice jednaka je proizvodu elemenata po glavnoj dijagonali.

Kako je računanje determinanti po definiciji naporan posao (za matricu reda n zahteva se računanje $n!$ sabiraka), potreban je neki praktičniji način.

[1] Pierre Frédéric Sarrus (1798–1861), francuski matematičar

Laplasov razvoj determinante

U matrici $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(n, K)$ posmatrajmo element a_{ij}. Označimo sa M_{ij} determinantu matrice koja je dobijena iz matrice A brisanjem $i-$te vrste i $j-$te kolone - takva determinanta naziva se **minor** elementa a_{ij}. Iz minora M_{ij} dobijamo **algebarski komplement** ili **kofaktor** elementa a_{ij} na sledeći način:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Teorema 5.5.1 (Laplas[2])**.** *Determinanta matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}(n, K)$ može se razviti po $i-$toj vrsti:*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij},$$

odnosno po $j-$toj koloni:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij},$$

gde su $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ proizvoljni i fiksirani brojevi.

Dokaz ovog važnog rezultata može se naći u knjizi Ušćulić, Miličić: Elementi više matematike I, str. 175.

Dakle, primenom Laplasove teoreme, determinantu reda n svodimo na računanje n determinanti reda $n-1$. Ukoliko odaberemo vrstu odnosno kolonu matrice koja ima najviše nula elemenata, i razvijemo determinantu po toj vrsti odnosno koloni, dobiće se manje od n determinanti reda $n-1$, koje možemo dalje razvijati dok ih ne svedemo na determinante oblika 3×3 ili trougaonu matricu, čiju determinantu lako nalazimo.

Primer 5.5.2. Prikazaćemo računanje nekih determinanti.

1. Gornje trougaona matrica: njenu determinantu razvijamo po prvoj koloni (ili poslednjoj vrsti), čime ponovo dobijamo gornje trougaonu matricu - ovaj postupak ponavljamo odgovarajući broj puta.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \mathbf{0} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \mathbf{0} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} \mathbf{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ \mathbf{0} & a_{33} & a_{34} \\ \mathbf{0} & 0 & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= \quad a_{11}(-1)^{1+1} a_{22} \begin{vmatrix} \mathbf{a_{33}} & a_{34} \\ \mathbf{0} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

[2] Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749–1827), francuski matematičar i astronom

Dakle, determinanta gornje trougaone matrice jednaka je proizvodu dijagonalnih elemenata te matrice. Čitaocu se preporučuje da utvrdi čemu je jednaka determinanta sledeće matrice:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Izračunajmo determinantu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako druga kolona ima najveći broj nula elemenata, Laplasov razvoj radimo po toj koloni:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & \mathbf{0} & 2 & -1 \\ 1 & \mathbf{2} & 0 & -2 \\ 4 & \mathbf{0} & 6 & -3 \\ 5 & \mathbf{0} & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}\, 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Sada dobijenu determinantu možemo razviti po trećoj vrsti ili koloni - mi ćemo se opredeliti za razvoj po trećoj vrsti:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & -3 \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\, 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\, 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 10.$$

Prema tome, $\det A = 20$.

Za lakše izračunavanje i rad sa determinantama (posebno većeg reda) korisno je poznavanja osnovnih osobina determinanti.

Tvrđenje 5.5.1 (Osobine determinanti)**.** *Neka* $A, B \in \mathcal{M}(n, K)$*. Tada*

1. $detA^T = \det A$.
2. *Determinanta matrice koja ima vrstu/kolonu čiji su svi elementi nule je nula.*
3. *Ako je matrica* B *dobijena transpozicijom dveju vrsta/kolona matrice* A*, onda je* $\det B = -\det A$.

4. *Za svaku matricu A koja ima dve jednake vrste/kolone je* $\det A = 0$.

5. *Ako se elementi jedne vrste/kolone pomnože skalarom i dodaju elementima neke druge vrste/kolone, vrednost determinante se ne menja.*

6. *Ako se elementi jedne vrste/kolone determinante D pomnože skalarom $\lambda \neq 0$, tada je vrednost determinante λD.*

7. *Ako je svaki element $k-$te vrste/kolone determinante D zbir dva sabirka $a_{ki}^{(1)} + a_{ki}^{(2)}, i = \overline{1,n}$, tada $D = D_1 + D_2$, pri čemu D_1 sadrži $a_{ki}^{(1)}$ u $k-$toj koloni, a D_2 sadrži $a_{ki}^{(2)}$:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1k}^{(1)} + a_{1k}^{(2)} & \vdots & a_{1n} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \vdots & a_{kk}^{(1)} + a_{kk}^{(2)} & \vdots & a_{kn} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{nk}^{(1)} + a_{nk}^{(2)} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1k}^{(1)} & \vdots & a_{1n} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{k1} & \vdots & a_{kk}^{(1)} & \vdots & a_{kn} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{nk}^{(1)} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1k}^{(2)} & \vdots & a_{1n} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{k1} & \vdots & a_{kk}^{(2)} & \vdots & a_{kn} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{nk}^{(2)} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

8. $\det(AB) = \det A \det B$. *(teorema Koši-Bine)*

Proof. U dokazu koristimo definiciju determinante.

1. Jasno, jer se u sumi determinante javljaju sve moguće permutacije elemenata u oba slučaja.

2. To znači da u svakom od sabiraka determinante jedan faktor je nula, pa je onda i cela suma nula:

$$\det A_0 = \sum_{p \in S_n} (-1)^{inv(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \ldots \cdot 0 \cdot \ldots a_{np(n)} = 0.$$

3. Dokaz ovog rezultata može se naći u knjizi Ušćumlić, Miličić: Elementi više matematike I, str. 172.

4. Dokaz ovog rezultata može se naći u knjizi Ušćumlić, Miličić: Elementi više matematike I, str. 168.

5. Dokaz ovog rezultata može se naći u knjizi Ušćumlić, Miličić: Elementi više matematike I, str. 171.

6. Kako su svi elementi jedne vrste/kolone "deljivi" sa λ, to znači da će svaki od sabiraka determinante sadržati faktor λ koji se može izvući kao zajednički činilac:

$$\begin{aligned}\det A_\lambda &= \sum_{p\in S_n}(-1)^{inv(p)}a_{1p(1)}a_{2p(2)}\dots(\lambda a_{ip(i)})\dots a_{np(n)} =\\ &= \lambda\sum_{p\in S_n}(-1)^{inv(p)}a_{1p(1)}a_{2p(2)}\dots a_{ip(i)}\dots a_{np(n)} = \lambda\det A.\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}D &= \sum_{p\in S_n}(-1)^{inv(p)}a_{1p(1)}a_{2p(2)}\dots(a^{(1)}_{kp(k)}+a^{(2)}_{kp(k)})\dots a_{np(n)} =\\ &= \sum_{p\in S_n}(-1)^{inv(p)}a_{1p(1)}a_{2p(2)}\dots a^{(1)}_{kp(k)}\dots a_{np(n)} +\\ &+ \sum_{p\in S_n}(-1)^{inv(p)}a_{1p(1)}a_{2p(2)}\dots a^{(2)}_{kp(k)}\dots a_{np(n)} = D_1+D_2.\end{aligned}$$

8. Pomnožimo sada $i-$tu vrstu skalarom λ i dodajmo je $j-$toj koloni:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{nk} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{k1}+\lambda a_{i1} & a_{k2}+\lambda a_{i2} & \cdots & a_{kn}+\lambda a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{nk} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Primenom prethodne osobine, dobijamo da je zadnja determinanta dalje jednaka sa:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{nk} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{nk} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

odnosno primenom osobine 5:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D + \lambda \cdot 0 = D,$$

pošto determinanta matrice koja ima dve iste vrste jednaka je nuli.

□

Prethodno navedene osobine determinanti možemo iskoristiti pri računanju determinanti višeg reda. Na primer, izračunajmo vrednost determinante

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix},$$

gde su a, b, c, d parametri. Naš cilj je da ovu determinantu dovedemo na neki oblik lak za računanje, recimo gornje trougaonu formu. Zato množimo prvu vrstu sa -1 i dodajemo drugoj, drugu sa -1 i dodajemo trećoj, a treću sa -1 i dodajemo četvrtoj; dobijamo:

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c).$$

Tvrđenje 5.5.2. *Ukoliko je $i \neq j$, za algebarske komplemente matrice $A \in \mathcal{M}(n, K)$ važi:*

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0.$$

Dokaz ovog rezultata može se naći u knjizi Ušćumlić, Miličić: Elementi više matematike I, str. 179.

5.6 Rang matrice

Podsetimo se, **minor $k-$tog reda** matrice A je determinanta kvadratne podmatrice matrice A koja se dobija u preseku proizvoljnih k vrsta i proizvoljnih k kolona te matrice.

Definicija 5.6.1. *Prirodan broj r je* **rang matrice** $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ *ako postoji minor reda r matrice A koji je različit od nule, dok su svi minori reda $r+1$ jednaki nuli. Koristimo zapis $r(A) = r$.*

Iz definicije vidimo da za matricu A tipa $m \times n$ važi: $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$, s tim što je $r(A) = 0$ akko $A = \mathbf{0}$.

Ukoliko je $r(A) = r$, tada se svaki nenula minor $r-$tog reda naziva **bazisni minor**, dok su vrste/kolone koje generišu bazisni minor **bazisne vrste/kolone**.

Primer 5.6.1. Potražimo rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Kako A nije nula-matrica, prema komentaru posle definicije imamo da $0 < r(A) \leq \min\{2, 3\} = 2$, odnosno $r(A)$ je sigurno bar 1. Ispitajmo sada da li postoji minor reda dva različit od nule. Jedan takav minor dobijamo u preseku prve i treće kolone sa prvom i drugom vrstom:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

te zaključujemo da $r(A) = 2$.

Primećujemo da i za matrice malih dimenzija ovaj način nalaženja ranga može biti naporan. Prelazimo na izučavanje osobina ranga matrice pre no što damo efikasniji metod za njegovo određivanje.

Tvrđenje 5.6.1. *Neka je $A \in \mathcal{M}(m \times n, K)$ i $\lambda \in K$.*

1. $r(A^T) = r(A)$;

2. *rang se ne menja ako se permutuju dve vrste/kolone;*

3. *rang se ne menja ako se elementi vrste/kolone pomnože sa $\lambda \neq 0$;*

4. *rang se ne menja ako se jednoj vrsti/koloni dodaju elementi neke druge vrste/kolone pomnoženi sa λ;*

5. *rang se ne menja ako se izostavi vrsta/kolona čiji su svi elementi nula;*

6. *rang se ne menja ako se izostavi vrsta/kolona koja je linearna kombinacija ostalih vrsta/kolona.*

Matrica je **kvazitrougaona** (u literaturi se koristi i termin "row echelon form") ako:

1. sve vrste koje imaju bar jedan nenula element su iznad vrsta koje imaju sve elemente nule
2. prvi nenula element vrste sa leve strane (tzv. vodeći koeficijent ili pivot) je uvek desno od vodećeg koeficijenta vrste iznad
3. svi elementi u kolonama ispod vodećih koeficijenata su nule.

Primer matrice u kvazitrougaonoj formi:

$$\begin{bmatrix} 3 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gde sa $*$ označavamo proizvoljan element.

Definicija 5.6.2. *Dve matrice A i B su* **ekvivalentne**, *u oznaci $A \sim B$, ako se od jedne od njih može dobiti druga primenom konačnog broja* **elementarnih transformacija**:

- *permutacija dve vrste;*
- *množenje vrste nenula skalarom;*
- *množenje vrste skalarom i dodavanje nekoj drugoj vrsti.*

Primer 5.6.2. Koristeći elementarne transformacije proizvoljnu matricu svodimo na kvazitrougaonu formu iz koje lako nalazimo rang tako što prebrojimo pivote. Nizom elementarnih transformacija polaznu matricu sveli smo na kvazitrougaoni oblik u kojem su pivoti podebljani - dakle, rang matrice je 3.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 22 & 22 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Transformacije koje su izvedene:

1. prva vrsta menja mesto sa trećom
2. prvu vrstu množimo sa 4 i dodajemo drugoj
3. drugu vrstu delimo sa 22, a treću i četvrtu sa 2
4. drugu vrstu množimo sa -1 i dodajemo trećoj, odnosno sa 1 i dodajemo četvrtoj
5. treću vrstu dodajemo četvrtoj

5.7 Inverz matrice - II deo

Teorema 5.7.1. *Kvadratna matrica* $A \in \mathcal{M}(n, K)$ *je invertibilna ako i samo ako* $\det(A) \neq 0$. *U tom slučaju je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, adj(A).$$

Proof. Pretpostavimo da je B inverzna matrica matrice A; to znači da $AB = BA = I_n$. Kako je, prema teoremi Koši-Binea, $\det(AB) = \det A \det B$, sledi da $\det A \cdot \det B = \det I_n = 1$, odnosno $\det A \neq 0$.

Obratno, neka je $\det A \neq 0$, tada postoji $(\det A)^{-1} \in K$. Formiramo tzv. **adjungovanu matricu** matrice A, u oznaci $adj(A)$, na sledeći način: svaki element matrice A zamenimo njegovim algebarskim komplementom, a zatim tako dobijenu matricu transponujemo:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sada treba dokazati da $\frac{1}{\det A}\, adj(A) = A^{-1}$.

$$adj(A) \cdot A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}A_{11} + \ldots + a_{n1}A_{n1} & a_{12}A_{11} + \ldots + a_{n2}A_{n1} & \cdots & a_{1n}A_{11} + \ldots + a_{nn}A_{n1} \\ a_{11}A_{12} + \ldots + a_{n1}A_{n2} & a_{12}A_{12} + \ldots + a_{n2}A_{n2} & \cdots & a_{1n}A_{12} + \ldots + a_{nn}A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11}A_{1n} + \ldots + a_{n1}A_{nn} & a_{12}A_{1n} + \ldots + a_{n2}A_{nn} & \cdots & a_{1n}A_{1n} + \ldots + a_{nn}A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Kako je $a_{1i}A_{1i} + \ldots + a_{ni}A_{ni} = \det A$ za $i = \overline{1,n}$ i $a_{1i}A_{1j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} = 0$ kad $i \neq j$, sledi da

$$adj(A) \cdot A = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix} = \det A \cdot I_n,$$

odnosno matrica A je invertibilna:

$$\left(\frac{1}{\det A}\, adj(A)\right) \cdot A = I_n.$$

□

Primer 5.7.1. Za nalaženje inverzne matrice reda 3 videti svesku s vežbi!

Posledica 5.7.1. *Za regularnu matricu A važi* $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$. *Slične matrice imaju jednake determinante.*

Proof. Prema Koši-Bineovoj teoremi,

$$1 = \det I = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det(A^{-1}),$$

odakle sledi tvrđenje.

Ako su matrice A i B slične, to znači da postoji regularna matrica C takva da $B = C^{-1}AC$, odakle po teoremi Koši-Binea sledi:

$$\det B = (\det C^{-1}) \cdot \det A \cdot \det C = \det A.$$

□

5.8 Sistemi linearnih jednačina

Definicija 5.8.1. *Pod* **sistemom od** m **linearnih jednačina sa** n **nepoznatih nad poljem** K *podrazumeva se skup jednačina S:*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Elementi $a_{ij} \in K$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, su koeficijenti sistema, a $b_i \in K$, $\overline{1,m}$, su slobodni članovi.

Gornjim sistemom na prirodan način određene su matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

koje se redom nazivaju **matrica sistema**, **proširena matrica sistema** i **kolona slobonih članova**. Matrica kolona $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ je **matrica nepoznatih**. Ako je $m = n$, sistem je **kvadratan**, a ako je još i $\det A \neq 0$, onda je **kramerovski**. Ukoliko $B = \mathbf{0}$, sistem je **homogen**, dok je u suprotnom **nehomogen**.

Gornji sistem se može predstaviti u matričnom obliku kao

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

odnosno kratko kao matrična jednačina $AX = B$.

Definicija 5.8.2. *Pod* **rešenjem** *sistema S podrazumeva se proizvoljan vektor $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n$ koji je rešenje svake jednačine sistema. Skup*

$$\mathcal{R}(S) = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n : \lambda \text{ je rešenje sistema } S\}$$

je **skup rešenja sistema** *S. Sistem može biti:*

- **nesaglasan** *(nerešiv, protivrečan), ako $\mathcal{R}(S) = \emptyset$;*
- **saglasan** *(rešiv), ako $\mathcal{R}(S) \neq \emptyset$;*
  - **određen** *(ima jedinstveno rešenje), ako $card(\mathcal{R}(S)) = 1$;*
  - **neodređen** *(beskonačno mnogo rešenja), ako $card(\mathcal{R}(S)) > 1$.*

Rešiti sistem *znači odrediti skup $\mathcal{R}(S)$.*

Ukoliko sistem sadrži bar jedan parametar, tada se ispituje rešivost sistema u zavisnosti od parametara, i sistem se rešava u slučajevima kada je to muguće.

Dva linearna sistema su **ekvivalentni** ukoliko su im skupovi rešenja jednaki. Polazni sistem se može prevesti u njemu ekvivalentan sistem korišćenjem konačnog broja sledećih **elementarnih transformacija**:

- zamena bilo koje dve jednačine;
- množenje proizvoljne jednačine skalarom $\lambda \neq 0$;
- dodavanje jedne jednačine pomnožene nekim skalarom nekoj drugoj.

5.8.1 Gausov postupak eliminacije

Gausov[3] postupak eliminacije zasniva se na elementarnim transformacijama sistema S. Ako je $a_{11} \neq 0$, (ukoliko nije, onda postoji bar jedna jednačina kod koje koeficijent uz x_1 nije nula, pa zamenom mesta jednačinama dolazimo na ovaj slučaj) množimo prvu jednačinu redom sa $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, \ldots, -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ i dodajemo je redom drugoj, ..., $m-$toj jednačini, čime dobijamo sistem:

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)},\\
a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)},\\
a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n &= b_3^{(1)}\\
\cdots\cdots\cdots&\\
a_{m2}^{(1)}x_2 + a_{m3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n &= b_m^{(1)},
\end{aligned}$$

gde je $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j}\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, $b_i^{(1)} = b_i - b_1\frac{a_{i1}}{a_{11}}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Jedinica u gornjem indeksu koeficijenata odnosi se na koeficijente sistema posle primene ekvivalentnih transformacija kojima smo "eliminisali" promenljivu x_1 iz svih jednačina osim prve. Može se primetiti da smo nepoznatu x_1 eliminisali iz svih jednačina osim prve.

Sada nastavljamo potpuno analogno; uz pretpostavku $a_{22}^{(1)} \neq 0$ množimo drugu jednačinu redom sa $-\frac{a_{12}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},\ -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \ldots, -\frac{a_{m2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ i dodajemo je redom prvoj, trećoj, četvrtoj, ..., $m-$toj jednačini, čime se dobija ekvivalentan sistem kod kojeg se nepoznata x_1 javlja samo u prvoj, a nepoznata x_2 samo u drugoj jednačini. Nastavljajući opisani postupak, polazni sistem svodimo na jedan od sledeća dva njemu ekvivalentna oblika:

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(k)}x_1 + \qquad\qquad a_{1,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \ldots + a_{1n}^{(k)}x_n &= b_1^{(k)},\\
a_{22}^{(k)}x_2 + \qquad a_{2,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \ldots + a_{2,n}^{(k)}x_n &= b_2^{(k)},\\
\cdots\cdots\cdots&\\
a_{kk}^{(k)}x_k + a_{k,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \ldots + a_{kn}^{(k)}x_n &= b_k^{(k)}
\end{aligned}$$

[3] Johann Carl Friedrich Gauss(1777-1855), veliki nemački matematičar i fizičar

odnosno

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(k)}x_1 \qquad\qquad\qquad + \cdots &= b_1^{(k)},\\
a_{22}^{(k)}x_2 \qquad\qquad + \cdots &= b_2^{(k)},\\
\cdots\cdots\cdots \qquad &\\
a_{nn}^{(k)}x_n + \cdots &= b_n^{(k)}\\
0 &= b_{n+1}^{(k)}\\
\cdots \qquad &\\
0 &= b_m^{(k)}.
\end{aligned}$$

U prvom slučaju sistem je saglasan, jer je jedno rešenje sistema

$$x_1 = \frac{b_1^{(k)}}{a_{11}^{(k)}},\ x_k = \frac{b_1^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},\ x_{k+1} = \ldots = x_n = 0.$$

Štaviše, ako je $k < n$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja koja se dobijaju kad se za $x_{k+1}, \ldots, x_n$ stave proizvoljne vrednosti, a iz prvih k jednačina dobiju vrednosti za $x_1, \ldots, x_k$ izražene preko $x_{k+1}, \ldots, x_n$.

U drugom slučaju, ako je bar jedan od brojeva $b_j^{(k)}$, $j = \overline{k+1, n}$ različit od nule, sistem je protivrečan, dok u slučaju $b_j^{(k)} = 0$, $j = \overline{k+1, n}$, sistem ima jedinstveno rešenje $x_1 = b_1^{(k)}, \ldots, x_k = b_k^{(k)}$.

Dakle, izveli smo i diskusiju rešivosti sistema. Kako je nepraktičo baratati sa celim jednačinama kada se informacije nalaze u koeficijentima, obično ćemo koeficijente sistema organizovati u (proširenu) matricu sistema, i izvoditi Gausovu eliminaciju nad elementima te matrice.

Primer 5.8.1. Ispitajmo rešivost sistema u zavisnosti od parametra $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
x + y + z &= p\\
x + (1+p)y + z &= 2p\\
x + y + p(1+z) &= 0.
\end{aligned}$$

Primetimo prvo da zadnja jednačina nije zapisana u formi zbira koeficijent puta nepoznata, pa ćemo prepisati sistem u odgovarajućem obliku:

$$\begin{aligned}
x + y + z &= p\\
x + (1+p)y + z &= 2p\\
x + y + pz &= -p.
\end{aligned}$$

Sada pristupamo uzastopnoj eliminaciji nepoznatih. Množimo prvu jednačinu sa -1 i dodajemo je drugoj odnosno trećoj - dobija se

$$\begin{aligned} x+y+z &= p \\ py &= p \\ (p-1)z &= -2p. \end{aligned}$$

Sada razlikujemo slučajeve:

- ako $p \neq 0 \wedge p \neq 1$, onda $z = -\frac{2p}{p-1}$, $y = 1$, dok x nalazimo zamenom y i z u prvu jednačinu: $x = p - y - z = p - 1 + \frac{2p}{p-1} = \frac{p^2+1}{p-1}$.
- ako $p = 1$ sistem se svodi na

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ y &= 1 \\ 0 &= -2, \end{aligned}$$

  odnosno protivrečan je.
- ako $p = 0$ sistem se svodi na

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ 0 \cdot y &= 0 \\ -z &= 0, \end{aligned}$$

  odnosno $z = 0$, y je proizvoljno, a $x = -y$.

Da sumiramo, za $p \neq 0 \wedge p \neq 1$ sistem je određen, i njegovo rešenje je $(x,y,z) = \left(\frac{p^2+1}{p-1}, 1, -\frac{2p}{p-1}\right)$; za $p = 1$ sistem je protivrečan, dok za $p = 0$ je neodređen i ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(x,y,z) = (-t,t,0)$, za proizvoljno $t \in \mathbb{R}$.

5.8.2 Teorema Kroneker-Kapeli

Teorema 5.8.1 (Kroneker[4]-Kapeli[5]). *Sistem S je saglasan akko* $r(A) = r(\tilde{A})$.

Komentar: kako je matrica A sadržana u matrici $\tilde{A} = [A|B]$, jasno je da $r(A) \leq r(\tilde{A})$.

Proof. Neka je sistem S, zapisan u matričnom obliku kao $AX = B$, saglasan. Tada postoji rešenje $(x_1, \dots, x_n) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, što znači da

$$a_{i1}\lambda_1 + a_{i2}\lambda_2 + \ldots + a_{in}\lambda_n = b_i, \ i = \overline{1,m};$$

to se matrično može zapisati kao

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix} = B.$$

Dakle, kolona slobodnih članova iz $\tilde{A}$ je linearna kombinacija prethodnih kolona, što na osnovu osobina ranga matrice znači da se rang ne menja ako sa ta kolona odbaci, tj. $r(A) = r(\tilde{A})$.

Pretpostavimo sada da $r(A) = r(\tilde{A}) = r$ i dokažimo da postoji rešenje sistema. Neka su, bez umanjenja opštosti, prvih r kolona bazisne kolone. Kako je svaka kolona matrice linearna kombinacija bazisnih kolona, to znači da se zadnja kolona matrice $\tilde{A}$ (tj. kolona slobodnih članova) može predstaviti kao linearna kombinacija bazisnih kolona za neke konstante $c_1, \dots, c_r$:

$$c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + c_r \begin{bmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \cdots \\ a_{mr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix} = B.$$

Ovo je ekvivalentno sa

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \ldots + a_{ir}c_r = b_i, \ i = \overline{1,m},$$

odnosno

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \ldots + a_{ir}c_r + a_{i,r+1} \cdot 0 + \ldots + a_{in} \cdot 0 = b_i, \ i = \overline{1,m},$$

što znači da je $(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = (c_1, \dots, c_r, 0, \dots, 0)$ rešenje sistema S. □

[4] Leopold Kronecker (1823–1891), nemački matematičar
[5] Alfredo Capelli (1855–1910), italijanski matematičar

Posledica 5.8.1. *Neka je sistem S saglasan, tj. neka $r(A) = r(\tilde{A})$. Ako je $r = n$, sistem ima jedinstveno rešenje, a ako $r < n$, onda sistem ima beskonačno mnogo rešenja koja zavise od $n - r$ parametara.*

Primer 5.8.2. Sada ćemo iskoristiti teoremu Kroneker-Kapeli da bismo rešili sistem iz primera 5.8.1. Odgovarajuće matrice pridružene sistemu su:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+p & 1 \\ 1 & 1 & p \end{bmatrix}, \ \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & p \\ 1 & 1+p & 1 & | & 2p \\ 1 & 1 & p & | & -p \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} p \\ 2p \\ -p \end{bmatrix}.$$

Kako je A podmatrica matrice $\tilde{A}$, tražimo rang matrice $\tilde{A}$ (izvodeći transformacije sa vrstama) i iz njega čitamo i rang za A. Prvo množimo prvu vrstu sa -1 i dodajemo je drugoj i trećoj:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & p \\ 1 & 1+p & 1 & | & 2p \\ 1 & 1 & p & | & -p \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & p \\ 0 & p & 0 & | & p \\ 0 & 0 & p-1 & | & -2p \end{bmatrix}.$$

Sada u zavisnosti od p određujemo rang matrica A i $\tilde{A}$. Ako je $p \neq 0 \wedge p \neq 1$, imamo da $r(A) = r(\tilde{A}) = 3$ što je jednako broju nepoznatih, pa u ovom slučaju sistem ima jedinstveno rešenje. Ako $p = 0$, tada imamo:

$$\tilde{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix},$$

odnosno $r(A) = r(\tilde{A}) = 2 < 3 = n$, pa je sistem neodređen i rešenja zavise od $n - r(A) = 1$ parametra. Ukoliko $p = 1$, imamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 \end{bmatrix},$$

odnosno $r(A) = 2 < 3 = r(\tilde{A})$, pa je u ovom slučaju sistem protivrečan. U slučaju kada je sistem rešiv, ta rešenja nalazimo tako što se uzme ekvivalentni oblik sistema iz matrice iz koje je određen rang (taj sistem je već u "stepenastoj" formi kao posle Gausove eliminacije). Na primer, za slučaj $p = 0$ iz

$$\tilde{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix},$$

rekonstruišemo ekvivalentni oblik polaznog sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ -z &= 0 \end{aligned}$$

koji lako rešavamo kao u primeru 5.8.1.

5.8.3 Teorema Kramera

Ovaj metod koristi se kada sistem ima jednak broj jednačina i nepoznatih, tj. kad je matrica sistema kvadratna.

Definicija 5.8.3. *Pod* **determinantom sistema**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

podrazumeva se determinanta D matrice sistema $A = [a_{ij}]$. Od interesa su i determinante $D_k,\ k = \overline{1,n}$, dobijene kada se u matrici sistema $k-$ta kolona zameni kolonom slobodnih članova.

Teorema 5.8.2 (Kramer[6]). *Kvadratni sistem linearnih jednačina ima jedinstveno rešenje ako i samo ako je determinanta tog sistema različita od nule (tj. akko je kramerovski). U tom slučaju je rešenje dato sa:*

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Proof. Ako se prva jednačina sistema pomnoži algebarskim komplementom A_{1j} elementa a_{1j} determinante D, druga sa A_{2j},…, $n-$ta sa A_{nj}, a zatim se dobijene jednačine saberu, dobija se:

$$\begin{aligned} &(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \ldots + a_{n1}A_{nj})x_1 + (a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + \ldots + a_{n2}A_{nj})x_2 + \\ &+ \ldots + (a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj})x_j + \ldots + \\ &+(a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \ldots + a_{nn}A_{nj})x_n = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj}. \end{aligned}$$

Ako se iskoristi osobina determinanti

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in} = \det A;\quad a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn} = 0, (i \neq k),$$

[6]Gabriel Cramer (1704–1752), švajcarski matematičar

dobija se:

$$Dx_j = D_j,\ j = \overline{1,n}. \tag{5.1}$$

Ovaj sistem je ekvivalentan polaznom sistemu kad $D \neq 0$. Zaista, ako je $x_1 = \lambda_1, \ldots, x_n = \lambda_n$ rešenje polaznog sistema, tada imamo

$$a_{i1}\lambda_1 + \ldots + a_{in}\lambda_n = b_i,\ i = \overline{1,n},$$

a ako se ovaj sistem transformiše na isti način kao polazni sistem (množenje sa A_{ij} i sabiranje jednačina), dobija se $D\lambda_1 = D_1, \ldots, D\lambda_n = D_n$, pa je $x_1 = \lambda_1, \ldots, x_n = \lambda_n$ rešenje sistema 5.1.

Obratno, iz matričnog zapisa kvadratnog sistema linearnih jednačina $AX = B$, ako je determinanta sistema različita od nule (tj. $D = \det A \neq 0$), sledi da postoji A^{-1}, pa imamo: $X = A^{-1}B$, što je jedinstveno rešenje zbog jedinstvenosti inverzne matrice. Sada je

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\det A}\, adj(A)B = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} A_{j1}b_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} A_{j2}b_j \\ \cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} A_{jn}b_j \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \cdots \\ D_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Treba još ispitati rešivost sistema kada $D = \det A = 0$. Polazimo od ekvivalentnog oblika polaznog sistema, a to je oblik:

$$Dx_k = D_k,\ k = \overline{1,n}.$$

Sada:

- ako $D = 0$ i $D_k = 0,\ k = \overline{1,n}$, sistem je **neodređen**;
- ako $D = 0$ i $(\exists k = \overline{1,n})\ D_k \neq 0$, sistem je **protivrečan**.

Primer 5.8.3. Sada ćemo (ponovo!) rešavati sistem 5.8.1, ali ovaj put primenom Kramerove teoreme. Izračunajmo prvo odgovarajuće determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+p & 1 \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & p & 0 \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} = 0 + p\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & p \end{vmatrix} = p(p-1),$$

(koristili smo osobinu 7 determinanti, a zatim razvoj po drugoj vrsti). Primenom Sarusovog pravila nalazimo:

$$D_1 = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 2p & 1+p & 1 \\ -p & 1 & p \end{vmatrix} = p^3 + p = p(p^2+1),$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ 1 & 2p & 1 \\ 1 & -p & p \end{vmatrix} = p^2 - p = p(p-1),$$
$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & 1+p & 2p \\ 1 & 1 & -p \end{vmatrix} = -2p^2.$$

Sada prelazimo na diskutovanje sistema po parametru p.

- ako $p \neq 0 \wedge p \neq 1$, onda $D \neq 0$, i sistem ima jedinstveno rešenje:

$$(x, y, z) = \Big(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \frac{D_3}{D}\Big) = \Big(\frac{p^2+1}{p-1}, 1, -\frac{2p}{p-1}\Big);$$

- ako $p = 1$, onda $D = 0$, ali $D_1 \neq 0$, pa je sistem protivrečan;
- ako $p = 0$, onda $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$, pa je sistem neodređen. Zamenimo $p = 0$ u polazni sistem, i vidimo da se on svodi na dve jednačine, $x + y + z = 0 \wedge x + y = 0$. Odavde sledi $z = 0$, dok jednu od preostale dve nepoznate uzimamo da je proizvoljna (recimo y), a drugu izražavamo iz jednačine kao $x = -y$. Dakle,

$$\mathcal{R}(S) = \{(-t, t, 0) : t \in \mathbb{R}\}.$$

5.8.4 Homogeni sistemi linearnih jednačina

Sistem linearnih jednačina kod kojih su slobodni članovi nule:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

ili u matričnom obliku $AX = \mathbf{0}$, naziva se **homogeni sistem linearnih jednačina**. Svaki homogeni sistem ima očigledno rešenje $x_1 = x_2 = \ldots = 0$ koje se naziva **trivijalno rešenje**. Od interesa je znati kada homogeni sistem ima netrivijalno rešenje.

Tvrđenje 5.8.1. *Homogeni sistem ima netrivijalna rešenja ako i samo ako je rang matrice sistema manji od broja nepoznatih ($r(A) < n$).*

Posledica 5.8.2. *Svaki homogeni sistem jednačina u kojem je broj jednačina manji od broja nepoznatih ima netrivijalna rešenja. Homogeni kvadratni sistem ima netrivijalna rešenja ako i samo ako je determinanta sistema jednaka nuli.*

Primer 5.8.4. Ispitajmo rešivost homogenog sistema u zavisnosti od parametra $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + (1+p)y + z &= 0 \\ x + y + pz &= 0. \end{aligned}$$

Kako za rang matrice sistema (vidi primer 5.5.2) važi:

$$r(A) = 3 \Leftrightarrow p \neq 0 \wedge p \neq 1;\ r(A) = 2 \Leftrightarrow p = 0 \vee p = 1,$$

zaključujemo da homogeni sistem ima samo trivijalno rešenje za $p \neq 0 \wedge p \neq 1$, dok za $p = 0$ i $p = 1$ ima netrivijalna rešenja redom: $\{(-y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$, odnosno $\{(-z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

5.9 Transformacija matrice linearnog operatora pri promeni baze

5.9.1 Promena baze vektorskog prostora

Posmatramo $n-$dimenzionalni vektorski prostor V nad poljem K, i u njemu dve baze, "staru" baza $(e) : e_1 \ldots, e_n$ i "novu" baza $(e') : e'_1, \ldots, e'_n$. Kako je (e) baza, to znači da se svaki vektor iz (e') može razložiti po vektorima iz (e) :

$$\begin{aligned} e'_1 &= a'_{11}e_1 + a'_{21}e_2 + \cdots + a'_{n1}e_n, \\ e'_2 &= a'_{12}e_1 + a'_{22}e_2 + \cdots + a'_{n2}e_n, \\ &\cdots \\ e'_n &= a'_{1n}e_1 + a'_{2n}e_2 + \cdots + a'_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Ukoliko skalare iz gornjeg razlaganja rasporedimo u kvadratnu matricu tako da skalari iz razlaganja vektora e'_1 budu u prvoj koloni itd, dobijamo matricu

$$\alpha' = \alpha'(e, e') = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

koja se naziva **matrica prelaska sa baze** (e) **na bazu** (e'). Matrični zapis je

$$\begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \cdots \\ e'_n \end{bmatrix} = (\alpha')^T \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdots \\ e_n \end{bmatrix}.$$

Ukoliko promenimo mesta bazama, tj. izrazimo elemente stare baze (e) preko elemenata nove baze (e'):

$$\begin{aligned} e_1 &= a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \cdots + a_{n1}e'_n, \\ e_2 &= a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \cdots + a_{n2}e'_n, \\ &\cdots \\ e_n &= a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \cdots + a_{nn}e'_n, \end{aligned}$$

a zatim koeficijente iz gornjih jednačina razlaganja organizujemo po kolonama u matricu, dobija se matrica prelaska sa nove na staru bazu:

$$\alpha = \alpha(e', e) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

Matrični zapis prelaska sa nove na staru bazu je:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdots \\ e_n \end{bmatrix} = \alpha^T \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \cdots \\ e'_n \end{bmatrix}.$$

Sada tražimo vezu između matrica α i α':

$$\begin{aligned} e'_i &= a'_{1i}e_1 + a'_{2i}e_2 + \cdots + a'_{ni}e_n = \\ &= a'_{1i}(a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \cdots + a_{n1}e'_n) + a'_{2i}(a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \cdots + a_{n2}e'_n) + \ldots + \\ &\quad + a_{ni}(a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \cdots + a_{nn}e'_n) = \\ &= (a_{11}a'_{1i} + a_{12}a'_{2i} + \ldots + a_{1n}a'_{ni})e'_1 + (a_{21}a'_{1i} + a_{22}a'_{2i} + \ldots + a_{2n}a'_{ni})e'_2 + \ldots + \\ &\quad + (a_{n1}a'_{1i} + a_{n2}a'_{2i} + \ldots + a_{nn}a'_{ni})e'_n = \\ &= (\alpha\cdot\alpha')_{1i}e'_1 + (\alpha\cdot\alpha')_{2i}e'_2 + \ldots + (\alpha\cdot\alpha')_{ni}e'_n. \end{aligned}$$

Vektori $e'_1, \ldots, e'_n$ čine bazu, pa su linearno nezavisni, te izjednačavanjem leve i desne strane dobijamo:

$$(\alpha\cdot\alpha')_{ki} = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

Dakle, $\alpha \cdot \alpha' = I_n$, što znači da su α i α' međusobno inverzne matrice. Po teoremi Koši-Binea, imamo

$$1 = \det I_n = \det(\alpha \cdot \alpha') = \det(\alpha) \cdot \det(\alpha') \Rightarrow \det(\alpha) \neq 0.$$

Invertiblinost matrice prelaska je očekivana, jer je logično da kad pređemo sa jedne baze na drugu, možemo i da se vratimo nazad. Dakle, $\alpha' = \alpha^{-1}$.

5.9.2 Promena koordinata vektora pri promeni baze

Neka je V vektorski prostor dimenzije n. Posmatramo u njemu dve baze, "staru" $(e) : e_1, \ldots, e_n$ i "novu" $(e') : e'_1, \ldots, e'_n$. Proizvoljan vektor $x \in V$ može se na jedinstvan način razložiti po ovim bazama:

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + \ldots + x'_n e'_n.$$

Treba naći zavisnost između koordinata istog vektora x u staroj i novoj bazi.

$$\begin{aligned}
& x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \ldots + x'_n e'_n = \\
= \; & x'_1(a'_{11} e_1 + a'_{21} e_2 + \cdots + a'_{n1} e_n) + x'_2(a'_{12} e_1 + a'_{22} e_2 + \cdots + a'_{n2} e_n) + \ldots + \\
& + x'_n(a'_{1n} e_1 + a'_{2n} e_2 + \cdots + a'_{nn} e_n) = \\
= \; & (a'_{11} x'_1 + a'_{12} x'_2 + \ldots + a'_{1n} x'_n) e_1 + (a'_{21} x'_1 + a'_{22} x'_2 + \ldots + a'_{2n} x'_n) e_2 + \ldots + \\
& + (a'_{n1} x'_1 + a'_{n2} x'_2 + \ldots + a'_{nn} x'_n) e_n.
\end{aligned}$$

Odavde je:

$$\begin{aligned}
x_1 &= a'_{11} x'_1 + a'_{12} x'_2 + \ldots + a'_{1n} x'_n \\
x_2 &= a'_{21} x'_1 + a'_{22} x'_2 + \ldots + a'_{2n} x'_n \\
\ldots & \\
x_n &= a'_{n1} x'_1 + a'_{n2} x'_2 + \ldots + a'_{nn} x'_n,
\end{aligned}$$

odnosno, u matričnoj formi:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

Označimo li $X' = [x'_1 \; x'_2 \; \ldots \; x'_n]^T$ i $X = [x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n]^T$, možemo pisati:

$$X = \alpha' \cdot X'.$$

Ako ovu jednakost pomnožimo sa leve strane sa $(\alpha')^{-1} \equiv \alpha$, dobijamo ekvivalentni oblik:

$$X' = \alpha \cdot X,$$

koji predstavlja promene koordinate vektora x pri prelasku sa stare na novu bazu.

5.9.3 Transformacija matrice linearnog operatora pri promeni baze

Definicija 5.9.1. *Matrice $A, B \in \mathcal{M}(n, K)$ su* **slične**, *u oznaci $A \sim B$, ako postoji regularna matrica $S \in \mathcal{M}(n, K)$ tako da $A = SBS^{-1}$.*

Relacija sličnosti na skupu matrica predstavlja relaciju ekvivalencije, što se pokazuje po definiciji.

Neka je V vektorski prostor dimenzije n; posmatrajmo u njemu dve baze: "staru" $(e) : e_1, \ldots, e_n$ i "novu" $(e') : e'_1, \ldots, e'_n$. Neka je na prostoru V dat linearan operator f. Označimo sa F_e odnosno $F_{e'}$ matricu operatora f u odnosu na bazu (e) odnosno (e'). Naš cilj je da nađemo vezu između matrica F_e i $F_{e'}$.

Neka je $x \in V$ vektor koji se operatorom f slika u vektor $y = f(x) \in V$. Vektori x i y mogu da se na jedinstven način razlože po bazama (e) i (e'):

$$x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = x'_1e'_1 + \ldots + x'_ne'_n, \; y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n = y'_1e'_1 + \ldots + y'_ne'_n,$$

pa im pridružujemo vektore

$$X = [x_1 \; \ldots \; x_n]^T_{(e)}, \; X' = [x'_1 \; \ldots \; x'_n]^T_{(e')}, \; Y = [y_1 \; \ldots \; y_n]^T_{(e)}, \; Y' = [y'_1 \; \ldots \; y_n]^T_{(e')}.$$

Sada imamo:

$$Y = F_e \cdot X, \; Y' = F_{e'} \cdot X', \; Y = \alpha' \cdot Y', \; X = \alpha' \cdot X',$$

odakle sledi $\alpha' \cdot Y' = F_e \cdot \alpha' \cdot X'$, odnosno

$$\alpha' \cdot F_{e'} \cdot X' = F_e \cdot \alpha' \cdot X'.$$

Kako gornja relacija važi za svaku matricu-kolonu X', zaključujemo da $\alpha' \cdot F_{e'} = F_e \cdot \alpha'$, odakle množenjem sa α sa leve strane dobijamo

$$F_{e'} = \alpha \cdot F_e \cdot \alpha^{-1}, \; F_e = \alpha^{-1} \cdot F_{e'} \cdot \alpha.$$

Dakle, **matrice istog linearnog operatora u različitim bazama su slične**.

Primer 5.9.1. Neka operator $A \in L(V)$, u odnosu na kanonsku bazu $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ prostora V, ima matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Neka je $\mathcal{B}' : \{e_1', e_2'\}$ nova baza prostora, data na sledeći način:

$$e_1' = e_1,\ e_2' = -2e_1 + e_2.$$

Tada je matrica prelaska sa stare na novu bazu

$$\alpha' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

odnosno matrica operatora A u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$ je:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}'} = (\alpha')^{-1} \cdot \mathbf{A}_{\mathcal{B}} \cdot \alpha' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Na ovom jednostavnom primeru videli smo da matrica nekih linearnih operatora promenom baze prostora dobija jednostavan, dijagonalni oblik.

Glava 6

Analitička geometrija

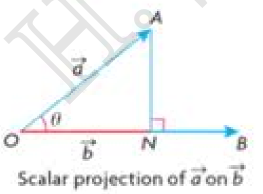
6.1 Skalarna projekcija vektora na osu

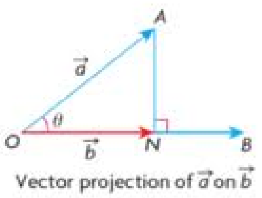
Definicija 6.1.1. *Prava p čiji je smer određen jediničnim vektorom* $\overrightarrow{p_0}$ *naziva se* **osa**, *dok je vektor* $\overrightarrow{p_0}$ *ort prave p.*

Neka je dat vektor $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$. Pod skalarnom (algebarskom) projekcijom vektora $\vec{r}$ na osu $\vec{p}$ podrazumeva se dužina duži $A'B'$, gde su A' i B' respektivno ortogonalne projekcije tačaka A i B na osu p, uzeta sa znakom "+" ukoliko je $\vec{r}$ orijentisan na istu stranu kao ort $\vec{p_0}$ u odnosu na ravan koja sadrži tačke A i A' i ortogonalna je na pravac p, a sa "-" u suprotnom. Koristi se oznaka r_p i u opštem slučaju važi:

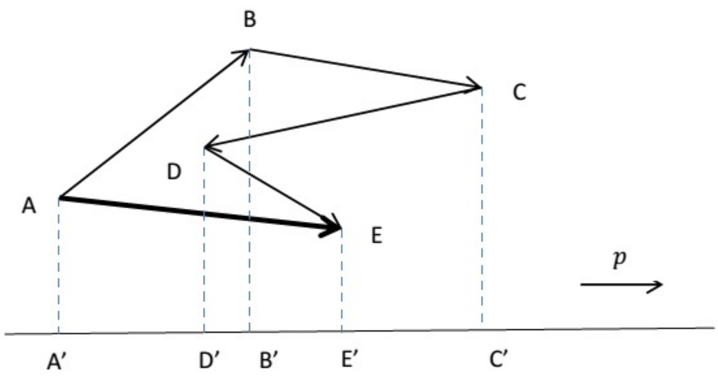
$$r_p = |\vec{r}| \cos \alpha,$$

gde je α ugao između vektora $\overrightarrow{p_0}$ i $\vec{r}$, i $0 \leq \alpha \leq \pi$.





Tvrđenje 6.1.1. *Projekcija zbira konačnog broja vektora na osu jednaka je zbiru projekcija tih vektora.*



Skicu dokaza pokazaćemo na primeru sa slike. Ukoliko iskoristimo oznake:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB},\ \vec{b} = \overrightarrow{BC},\ \vec{c} = \overrightarrow{CD},\ \vec{d} = \overrightarrow{DE},$$

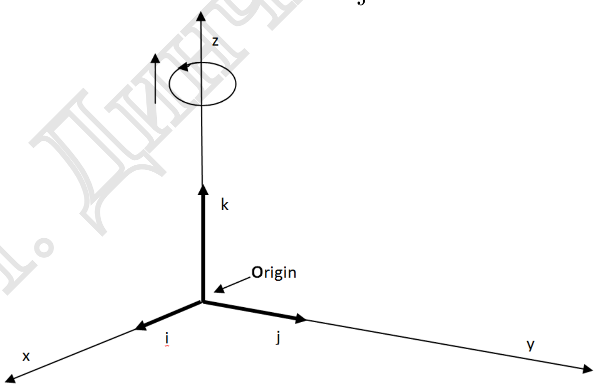
tada imamo $\vec{e} = \overrightarrow{AE} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$. Za odgovarajuće projekcije imamo:

$$a_p = A'B',\ b_p = B'C',\ c_p = -D'C',\ d_p = D'E',$$

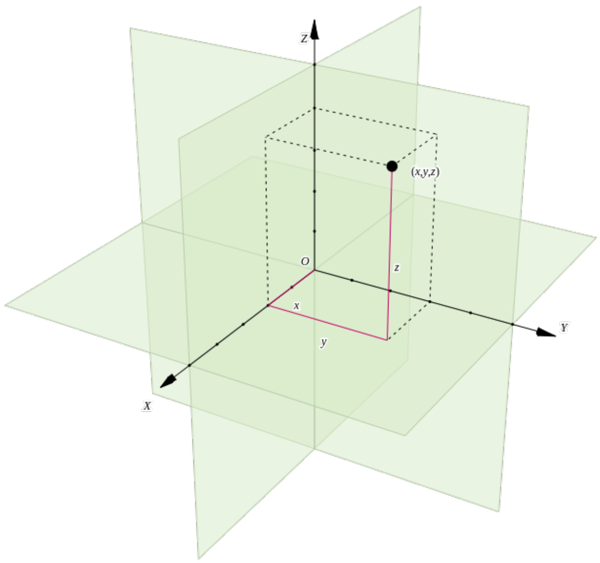
dok je $e_p = A'E' = a_p + b_p + c_p + d_p$, što je i trebalo dokazati.

6.2 Prostorni koordinatni sistem

Tri uzajamno ortogonalne ose koje prolaze kroz neku tačku O obrazuju **Dekartov pravougli kordinatni sistem**. Te prave, koje redom označavamo sa Ox, Oy, Oz, su **koordinatne ose**, a zajednička tačka O je **koordinatni početak**. Koordinatne ose orijentišu se kao na slici:



Ortove koordinatnih osa Ox, Oy, Oz označavamo sa $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, redom. Pokažimo sada da je svaka tačka prostora M u pravouglom koordinatnom sistemu određena uređenom trojkom realnih brojeva (x, y, z) - to su **koordinate** tačke M. Ako sa x, y, z, redom, označimo algebarske projekcije vektora $\overrightarrow{OM}$ na ose Ox, Oy, Oz:



imamo $\overrightarrow{OX} = x\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OY} = y\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OZ} = z\vec{k}$. Ako sa M' označimo ortogonalnu projekciju tačke M na ravan xOy, tada:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{MM'} = (\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}) + \overrightarrow{OZ} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) + z\vec{k} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Vektor $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = (x, y, z)$ naziva se **vektor položaja** tačke M a brojevi x, y, z su **Dekartove** (pravougle) **koordinate** tačke M.

Ako su date dve tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$, tada

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}) = \\ &= (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath} + (z_2 - z_1)\vec{k}, \end{aligned}$$

što je u potpunosti saglasno sa uobičajenim sabiranjem vektora.

Uređena trojka vektora $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ je ortonormirana baza vektorskog prostora V geometrijskih vektora. Podsećamo: sistem vektora je ortonormiran ako su svaka dva različita vektora tog sistema ortogonalni i ako je svaki vektor sistema normiran, tj. ima intenzitet 1.

6.3 Skalarni proizvod vektora

Definicija 6.3.1. Skalarni proizvod *vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$, u oznaci $\vec{x} \cdot \vec{y}$, je skalar (broj) $|\vec{x}||\vec{y}|\cos\angle(\vec{x}, \vec{y})$, gde je $\angle(\vec{x}, \vec{y})$ ugao između vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$. Dakle,*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos\angle(\vec{x}, \vec{y}).$$

Ako se primeti da je $|\vec{y}|\cos\angle(\vec{x},\vec{y})$ skalarna projekcija vektora $\vec{x}$ na vektor $\vec{y}$ (odnosno $|\vec{x}|\cos\angle(\vec{y},\vec{x})$ projekcija $\vec{y}$ na $\vec{x}$), tada je

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}|\cdot y_x = |\vec{y}|\cdot x_y.$$

Tvrđenje 6.3.1. *Ako su $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ proizvoljni vektori, a λ proizvoljan skalar, tada:*

1. $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x}$;
2. $\vec{x}\cdot(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\vec{z}$;
3. $(\lambda\vec{x})\cdot\vec{y} = \lambda(\vec{x}\cdot\vec{y})$;
4. $\vec{x}\cdot\vec{x} = |\vec{x}|^2$;
5. $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \le |\vec{x}||\vec{y}|$ *(nejednakost Koši-Švarc-Bunjakovski).*

Proof. 1. Sledi iz $\cos\angle(\vec{x},\vec{y}) = \cos\angle(\vec{y},\vec{x})$.

2. Ako se stavi $\vec{y}+\vec{z}=\vec{t}$, onda na osnovu osobina projekcije zbira:

$$\vec{x}\cdot(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}\cdot\vec{t} = |\vec{x}|t_x = |\vec{x}|(y_x+z_x) = |\vec{x}|y_x + |\vec{x}|z_x = \vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\vec{z}.$$

Analogno se dokazuje desni distributivni zakon.

3. Za $\lambda=0$ je trivijalno. Ako $\lambda>0$, tada imamo:

$$(\lambda\vec{x})\cdot\vec{y} = |\lambda\vec{x}||\vec{y}|\cos\angle(\lambda\vec{x},\vec{y}) = \lambda|\vec{x}||\vec{y}|\cos\angle(\vec{x},\vec{y}) = \lambda(\vec{x}\cdot\vec{y}),$$

dok za $\lambda<0$ važi:

$$\begin{aligned}(\lambda\vec{x})\cdot\vec{y} &= |\lambda\vec{x}||\vec{y}|\cos\angle(\lambda\vec{x},\vec{y}) = -\lambda|\vec{x}||\vec{y}|\cos\angle(-\vec{x},\vec{y}) = \\ &= -\lambda|\vec{x}||\vec{y}|\cos(\pi-\angle(\vec{x},\vec{y})) = \lambda|\vec{x}||\vec{y}|\cos\angle(\vec{x},\vec{y}) = \lambda(\vec{x}\cdot\vec{y}).\end{aligned}$$

4. $\vec{x}\cdot\vec{x} = |\vec{x}||\vec{x}|\cos\angle(\vec{x},\vec{x}) = |\vec{x}|^2\cos 0 = |\vec{x}|^2$.

5. Zbog $|\cos\angle(\vec{x},\vec{y})|\le 1$ sledi tvrđenje.

$\square$

Posledica 6.3.1. *Neka su $\vec{x},\vec{y}$ proizvoljni vektori. Tada:*

1. $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$;
2. $\cos\angle(\vec{x},\vec{y}) = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$;

3. $y_x = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$;

4. $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x}\cdot\vec{y} = 0$, $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$.

Dakle, ovo tvrđenje je geometrijskog tipa, i daje nam način da, koristeći skalarni proizvod, nalazimo redom: (1) intenzitet vektora, (2) ugao između dva vektora, (3) projekciju jednog vektora na drugi, kao i da ispitujemo (4) ortogonalnost dva vektora.

Ako su vektori dati u pravouglim koordinatama:

$$\vec{x} = x_1\vec{\imath} + x_2\vec{\jmath} + x_3\vec{k},\ \vec{y} = y_1\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + y_3\vec{k},$$

tada je njihov skalarni proizvod:

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

jer je $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = \vec{\imath}\cdot\vec{k} = \vec{\jmath}\cdot\vec{k} = 0$, a $\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} = \vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$.

Na osnovu prethodnog, sledi:

1. intenzitet vektora: $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$;
2. ugao između dva vektora: $\cos\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$;
3. projekcija vektora: $x_y = \frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$;
4. ortogonalnost dva nenula vektora: $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$.

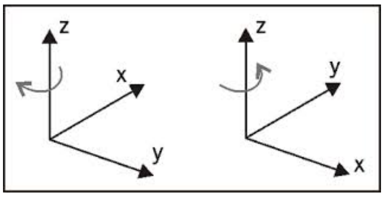
Primer 6.3.1. 1. Posmatrajmo pravougli trougao $\triangle OAB$ koji ima prav ugao kod temena O. Ako se njegove stranice orijentišu na sledeći način: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, tada:

$$|\vec{c}|^2 = \vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{b} - \vec{a})\cdot(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2.$$

Dakle, dobili smo poznatu Pitagorinu teoremu!

6.4 Vektorski proizvod vektora

Definicija 6.4.1. *Tri nekomplanarna vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sa zajedničkim početkom obrazuju* **desni triedar** *ako se rotacija $\vec{x}$ ka $\vec{y}$ najkraćim putem posmatrana sa kraja vektora $\vec{z}$ vrši u smeru suprotnom od smera kretanja kazaljke na satu.*



Definicija 6.4.2. Vektorski proizvod *vektora* $\vec{x}$ *i* $\vec{y}$*, u oznaci* $\vec{x} \times \vec{y}$*, je vektor koji:*

- *je ortogonalan na ravan određenu vektorima* $\vec{x}$ *i* $\vec{y}$*;*
- $\vec{x}, \vec{y}$ *i* $\vec{x} \times \vec{y}$ *čine desni triedar;*
- $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y})$.

Koristićemo i sledeći oblik definicije: ako je $\overrightarrow{n_0}$ jedinični vektor normalan na ravan koju obrazuju vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$, pri čemu $\vec{x}, \vec{y}, \overrightarrow{n_0}$ obrazuju desni triedar, onda

$$\vec{x} \times \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y})\, \overrightarrow{n_0}.$$

Prema definiciji, vektorski proizvodi ortova koordinatnih osa dati su sa:

$\times$	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$	$\vec{k}$
$\vec{\imath}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{\jmath}$
$\vec{\jmath}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{\imath}$
$\vec{k}$	$\vec{\jmath}$	$-\vec{\imath}$	$\vec{0}$

Tvrđenje 6.4.1. *Ako su* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ *proizvoljni vektori, a* λ *proizvoljan skalar, tada:*

1. $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$;
2. $(\lambda\vec{x}) \times \vec{y} = \vec{x} \times (\lambda\vec{y}) = \lambda(\vec{x} \times \vec{y})$;
3. $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$.

Proof. 1. Neposredno po definiciji.

2. Za $\lambda = 0$ je očigledno. Ako $\lambda > 0$ imamo

$$(\lambda\vec{x}) \times \vec{y} = |\lambda\vec{x}||\vec{y}| \sin \angle(\lambda\vec{x}, \vec{y})\, \overrightarrow{n_0} = \lambda|\vec{x}||\vec{y}| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y})\, \overrightarrow{n_0} = \lambda(\vec{x} \times \vec{y}),$$

dok se $\vec{x} \times (\lambda\vec{y}) = \lambda(\vec{x} \times \vec{y})$ dokazuje potpuno analogno. Ako sada $\lambda < 0$ (tj. $-\lambda = \mu > 0$), koristeći već dokazano imamo

$$\begin{aligned}(\lambda\vec{x}) \times \vec{y} &= (-\mu\vec{x}) \times \vec{y} = -(\vec{y} \times (-\mu\vec{x})) = -(-\mu)(\vec{y} \times \vec{x}) = \\ &= \mu(\vec{y} \times \vec{x}) = -\mu(\vec{x} \times \vec{y}) = \lambda(\vec{x} \times \vec{y}),\end{aligned}$$

odnosno analogno za drugi izraz.

3. Ovaj dokaz se može dati geometrijski (vidi udžbenik!), ali mi ćemo nešto kasnije dati dokaz korišćenjem osobina determinanti.

□

Ako su vektori dati u pravouglim koordinatama:

$$\vec{x} = x_1\vec{\imath} + x_2\vec{\jmath} + x_3\vec{k},\ \vec{y} = y_1\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + y_3\vec{k},$$

tada je njihov vektorski proizvod pogodno predstaviti u obliku determinante:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{\imath} - (x_1y_3 - x_3y_1)\vec{\jmath} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}.$$

Geometrijski smisao vektorskog proizvoda:

- broj $|\vec{x} \times \vec{y}|$ jednak je površini paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{x}$ i $\vec{y}$;
- Jednakost $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ važi akko su nenula vektori $\vec{x}, \vec{y}$ kolinearni $(\vec{x}||\vec{y})$. Zaista, iz $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ sledi da $x_2y_3 - x_3y_2 = 0$, $-(x_1y_3 - x_3y_1) = 0$ i $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$, odakle je:
$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3},$$
dok se obrat pokazuje neposredno.

Sada dajemo dokaz da $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$ koristeći koordinatni zapis vektora i osobinu determinanti:

$$\begin{aligned} \vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 + z_1 & y_2 + z_2 & y_3 + z_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}. \end{aligned}$$

6.5 Mešoviti proizvod vektora

Definicija 6.5.1. **Mešoviti proizvod** *vektora $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, u oznaci $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$, je skalar $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$. Dakle,*

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}.$$

Geometrijski smisao:

- ako vektori $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ obrazuju desni triedar, onda je mešoviti proizvod jednak zapremini paralelopipeda konstruisanog nad tim vektorima. Zaista, kako je visina paralelopipeda jednaka skalarnoj projekciji vektora $\vec{z}$ na vektor $\vec{x} \times \vec{y}$, a površina osnove je $B = |\vec{x} \times \vec{y}|$, onda

$$V = BH = |\vec{x} \times \vec{y}| z_{\vec{x}\times\vec{y}} = |\vec{x} \times \vec{y}| \, \frac{(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}}{|\vec{x} \times \vec{y}|} = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}.$$

  Za levi triedar je $V = -(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$, tako da u opštem slučaju imamo

$$V = |(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}|.$$

- Komplanarnost tri vektora ekvivalentna je sa njihovom linearnom zavisnošću, te važi

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = 0 \Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \text{ su nenula linearno zavisni vektori.}$$

Ako su vektori dati preko Dekartovih koordinata:

$$\vec{x} = x_1\vec{\imath} + x_2\vec{\jmath} + x_3\vec{k},\ \vec{y} = y_1\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + y_3\vec{k},\ \vec{z} = z_1\vec{\imath} + z_2\vec{\jmath} + z_3\vec{k},$$

tada:

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Ovo znači da su vektori $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ (dati svojim Dekartovim koordinatama) komplanarni ako i samo ako

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Za mešoviti proizvod nenula vektora važi tzv. invarijantnost u odnosu na kružno permutovanje njegovih činilaca:

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = (\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x} = (\vec{z} \times \vec{x}) \cdot \vec{y}.$$

Ova osobina se posebno lako dokazuje kad su vektori zadati u pravouglom koordinatnom sistemu, uz korišćenje osobine determinante da se zamenom mesta dvema vrstama menja znak determinante.

Još jedna zanimljiva osobina koja se lako dokazuje primenom koordinatne reprezentacije je:

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}.$$

6.5.1 Dvojni proizvod vektora

Definicija 6.5.2. Dvojni vektorski proizvod *vektora* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ *je vektor:*

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}).$$

Tvrđenje 6.5.1. $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}.$

Proof. Iz definicije vektorskog proizvoda vektora $\vec{x}$ i $\vec{y} \times \vec{z}$ sledi

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) \perp \vec{x},\ \vec{y} \times \vec{z},$$

što znači da je komplanaran sa $\vec{y}$ i $\vec{z}$. Zato postoje jedinstveni skalari α, β tako da

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = \alpha \vec{y} + \beta \vec{z}.$$

Pretpostavimo sada da su vektori x, y, z dati preko svojih Dekartovih koordinata. Imamo da je

$$\vec{w} = \vec{y} \times \vec{z} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{\imath} + (y_3 z_1 - y_1 z_3)\vec{\jmath} + (y_1 z_3 - y_3 z_1)\vec{k},$$

pa je

$$\begin{aligned}
\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_2 z_3 - y_3 z_2 & y_3 z_1 - y_1 z_3 & y_1 z_2 - y_2 z_1 \end{vmatrix} = \\
&= [x_2 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_1 - x_3 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_3]\vec{\imath} + \\
&\quad + [x_3 y_2 z_3 - x_3 y_3 z_2 - x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1]\vec{\jmath} + \\
&\quad + [x_1 y_3 z_1 - x_1 y_1 z_3 - x_2 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_2]\vec{k} = \\
&= [y_1(x_2 z_2 + x_3 z_3) - z_1(x_2 y_2 + x_3 y_3) + x_1 y_1 z_1 - x_1 y_1 z_1]\vec{\imath} + \\
&\quad + [y_2(x_1 z_1 + x_3 z_3) - z_2(x_1 y_1 + x_3 z_3) + x_2 y_2 z_2 - x_2 y_2 z_2]\vec{\jmath} + \\
&\quad + [y_3(x_1 z_1 + x_2 z_2) - z_3(x_1 y_1 + x_2 y_2) + x_3 y_3 z_3 - x_3 y_3 z_3]\vec{k} = \\
&= [(\vec{x} \cdot \vec{z}) y_1 - (\vec{x} \cdot \vec{y}) z_1]\vec{\imath} + [(\vec{x} \cdot \vec{z}) y_2 - (\vec{x} \cdot \vec{y}) z_2]\vec{\jmath} + [(\vec{x} \cdot \vec{z}) y_3 - (\vec{x} \cdot \vec{y}) z_3]\vec{k} = \\
&= (\vec{x} \cdot \vec{z})(y_1 \vec{\imath} + y_2 \vec{\jmath} + y_3 \vec{k}) - (\vec{x} \cdot \vec{y})(z_1 \vec{\imath} + z_2 \vec{\jmath} + z_3 \vec{k}) = \\
&= (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z},
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. □

Iz prethodnog tvrđenja sledi da

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = -(\vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y})) = -((\vec{z} \cdot \vec{y})\vec{x} - (\vec{z} \cdot \vec{x})\vec{y}),$$

što je u opštem slučaju različito od $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$. Dakle, vektorski proizvod **nije asocijativan**. Umesto toga važi tzv. **Jakobijev identitet**:

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{0},$$

koji se lako dokazuje primenom prethodnog tvrđenja.

6.6 Analitička geometrija

U klasičnoj matematici analitička geometrija predstavlja izučavanje geometrije korišćenjem koordinatnog sistema i metoda algebre i analize, za razliku od Euklidske geometrije koja polazi od osnovnih geometrijskih pojmova (tačka, prava, ravan, prostor) i koristi deduktivno zaključivanje zasnovano na aksiomama i teoremama. Svaki geometrijski oblik može se predstaviti algebarski, jednačinom ili sistemom jednačina, i njegove osobine se mogu ispitivati neposrednim radom sa tim jednačinama.

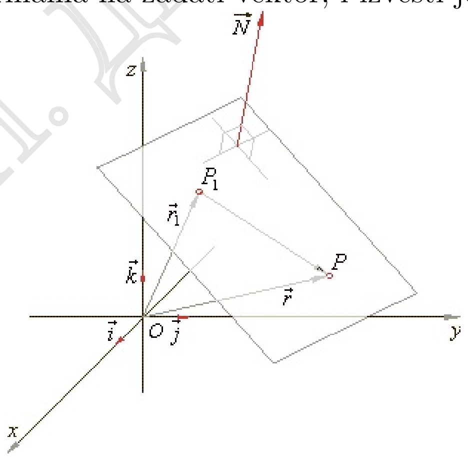
6.6.1 Jednačina ravni u prostoru

Iz srednjoškolske geometrije znamo da se ravan u prostoru potpuno određena na nekoliko načina:

- tri nekolinearne tačke
- dve paralelne prave
- prava i tačka van te prave
- dve prave koje se seku

Svi pomenuti načini se suštinski svode na tri nekolinearne tačke.

Sada ćemo poći od sledećeg: kroz zadatu tačku prolazi tačno jedna ravan normalna na zadati vektor, i izvesti jednan od oblika jednačine ravni.



Neka je u prostoru dat koordinatni sistem O_{xyz} i u njemu ravan α određena datom tačkom $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i datim vektorom $\vec{n} = (A, B, C)$ (odnosno $\vec{n} = A\vec{\imath} + B\vec{\jmath} + C\vec{k}$) koji je normalan na ravan α. Neka je $M(x, y, z)$ proizvoljna tačka ravni α kojoj odgovara vektor položaja $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, i neka je $\vec{r_0} = \overrightarrow{OM_1}$ vektor položaja tačke M_0. Tada je $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r_0}$ vektor koji pripada ravni α, a kako je vektor $\vec{n}$ normalan na α, biće normalan i na svaki vektor te ravni - specijalno i na $\vec{r} - \vec{r_0}$. Kako je skalarni proizvod dva ortogonalna vektora jednak nuli, odavde imamo:

$$(\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \vec{n} = 0; \tag{6.1}$$

to je **vektorska jednačina ravni kroz datu tačku normalne na dati vektor**. Ukoliko označimo $\vec{r_0} \cdot \vec{n} = a$ (što možemo, jer su i $\vec{r_0}$ i $\vec{n}$ poznati), i iskoristimo osobine skalarnog proizvoda, dobijamo **opštu vektorsku jednačinu ravni**

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = a. \tag{6.2}$$

Ako se vektori iz prethodnih formula napišu preko svojih koordinata u ortonormiranoj bazi $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$:

$$\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0),\ \vec{n} = (A, B, C),\ \vec{r} = (x, y, z),$$

na osnovu $\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ dobijamo **skalarnu jednačinu ravni kroz datu tačku normalne na dati vektor**:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{6.3}$$

Ako u prethodnoj jednačini označimo $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ (a to je upravo broj $-a$ iz jednačine 6.2), dobijamo **opštu skalarnu jednačinu ravni**:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{6.4}$$

Primetimo da su koeficijenti uz nepoznate upravo koordinate vektora normale!

Ukoliko su svi koeficijenti iz jednačine 6.4 različiti od nule, tada jednačinu možemo podeliti sa $-D$, čime ona uz smene $l = -\frac{D}{A}$, $m = -\frac{D}{B}$, $n = -\frac{D}{C}$, postaje

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1. \tag{6.5}$$

Ova jednačina se naziva **segmentna jednačina ravni**, jer ravan α seče koordinatne ose x, y, z redom u tačkama $(l, 0, 0), (0, m, 0), (0, 0, n)$. Zaista, presek $y-$ose i ravni α nalazimo iz sistema $Ax + By + Cz + D = 0 \wedge x = 0 \wedge z = 0$, odakle sledi $By + D = 0$, odnosno $y = -\frac{D}{B} = m$, pa je tačka preseka $(x, y, z) = (0, m, 0)$.

Pretpostavimo sada da je ravan data jednačinim 6.2, i neka je vektor normale $\vec{n}$ orijentisan na onu stranu od ravni α sa koje nije koordinatni početak. Neka je projekcija koordinatnog početka O na ravan α tačka P. Sada imamo $\overrightarrow{OP}||\vec{n}$. Kako je ugao između vektora $\vec{r}$ i $\vec{n}$ oštar, skalarna projekcija $\vec{r}$ na $\vec{n}$ je pozitivan broj, pa imamo

$$r_n = p = OP = \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{|\vec{n}|} = \frac{a}{|\vec{n}|}.$$

Ako bi vektor $\vec{n}$ bio suprotno orijentisan, tada $r_n = -p$. Dakle, rastojanje ravni date sa 6.2 od koordinatnog početka je

$$p = \frac{a}{\pm|\vec{n}|}. \tag{6.6}$$

Ako se sada jednačina 6.2 podeli sa $\pm|\vec{n}|$, dobija se

$$\vec{r}\cdot\frac{\vec{n}}{\pm|\vec{n}|} = \frac{a}{\pm|\vec{n}|}.$$

Vektor $\frac{\vec{n}}{\pm|\vec{n}|}$ je jedinični vektor normalan na α i njega ćemo označiti sa $\overrightarrow{n_0}$. Sada iz 6.6 dobija se **normalna jednačina ravni u vektorskom obliku**

$$\vec{r}\cdot\overrightarrow{n_0} = p. \tag{6.7}$$

Posmatrajmo sada jedinični vektor $\overrightarrow{n_0} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, i posmatrajmo uglove $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ između ovog vektora i koordinatnih vektora. Dobijamo:

$$\begin{aligned}
\cos\varphi_1 &= \cos(\overrightarrow{n_0}, \vec{\imath}) = \frac{\overrightarrow{n_0}\cdot\vec{\imath}}{|\overrightarrow{n_0}||\vec{\imath}|} = \overrightarrow{n_0}\cdot\vec{\imath} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})\cdot(1,0,0) = \hat{x},\\
\cos\varphi_2 &= \cos(\overrightarrow{n_0}, \vec{\jmath}) = \frac{\overrightarrow{n_0}\cdot\vec{\jmath}}{|\overrightarrow{n_0}||\vec{\jmath}|} = \overrightarrow{n_0}\cdot\vec{\jmath} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})\cdot(0,1,0) = \hat{y},\\
\cos\varphi_3 &= \cos(\overrightarrow{n_0}, \vec{k}) = \frac{\overrightarrow{n_0}\cdot\vec{k}}{|\overrightarrow{n_0}||\vec{k}|} = \overrightarrow{n_0}\cdot\vec{k} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})\cdot(0,0,1) = \hat{z}.
\end{aligned}$$

To znači da se vektor $\overrightarrow{n_0}$ može napisati kao

$$\overrightarrow{n_0} = \cos\varphi_1\vec{\imath} + \cos\varphi_2\vec{\jmath} + \cos\varphi_3\vec{k}, \tag{6.8}$$

te sada jednačina 6.7 postaje **normalna jednačina ravni u skalarnom obliku**:

$$x\cos\varphi_1 + y\cos\varphi_2 + z\cos\varphi_3 - p = 0. \tag{6.9}$$

Neka je ravan α određena sa tri nekolinearne tačke $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$, i neka je $M = (x, y, z)$ proizvoljna tačka ravni α. Posmatramo sledeće vektore:

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_0M_1},\ \vec{b} = \overrightarrow{M_0M_2},\ \vec{r_0} = \overrightarrow{OM_0},\ \vec{r} = \overrightarrow{OM}.$$

Tada su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r_0}$ linearno zavisni, jer se nalaze u istoj ravni, te postoje jedinstveni brojevi u, v takvi da je $\vec{r} - \vec{r_0} = u\vec{a} + v\vec{b}$, odnosno dobijena je **vektorska parametarska jednačina ravni**:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + u\vec{a} + \vec{b}. \tag{6.10}$$

Prelaskom na koordinate, uz koordinatne zapise vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ($\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$) dobijamo **parametarsku jednačinu ravni**:

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1,\ y = y_0 + ua_2 + vb_2,\ z = z_0 + ua_3 + vb_3. \tag{6.11}$$

Ukoliko se iskoristi uslov komplanarnosti vektora $\vec{a} = \overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{M_0M_2}$ i $\overrightarrow{M_0M}$, dobija se **jednačina ravni kroz tri nekolinearne tačke**

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{6.12}$$

Primer 6.6.1. Kako bi se stekao bolji uvid u različite oblike jednačina iste ravni, preporučuje se čitaocu da pažljivo isprati primer se strane 327 (Ušćumlić, Miličić: Elementi više matematike 1).

Rastojanje tačke od ravni

Pokazali smo da je rastojanje ravni $\vec{r} \cdot \vec{n} = a$ od koordinatnog početka dato sa

$$p = \frac{a}{\pm|\vec{n}|},$$

gde je $a = \vec{r_0} \cdot \vec{n}$. Sada posmatramo opštiji slučaj. Neka je $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tačka koja je sa one strane ravni α na koju je usmeren vektor $\vec{n}$. Označimo sa N ortogonalnu projekciju tačke M_0 na ravan α, i neka su $\vec{r_0} = \overrightarrow{OM_0}$ i $\vec{r} = \overrightarrow{ON}$ vektori položaja. Kako već znamo rastojanje ravni od koordinatnog početka, imamo

$$\overrightarrow{NM_0} = \pm d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm\, \vec{n_0}.$$

Kako je $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM_0}$, dobijamo da

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} \mp \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}.$$

Kako tačka N pripada ravni α, onda je zadovoljena jednačina 6.2, pa je

$$\left(\overrightarrow{r_0} \mp d\,\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right) \cdot \vec{n} = a.$$

Rešavanjem po d dobija se: $d = \frac{\overrightarrow{r_0}\cdot\vec{n}-a}{\pm|\vec{n}|}$, odnsono u koordinatnom zapisu $d = \frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. U svim slučajevima rastojanje se izračunava po formulama

$$d = \frac{|\overrightarrow{r_0} \cdot \vec{n} - a|}{|\vec{n}|}, \tag{6.13}$$

odnsono u koordinatnom zapisu

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{6.14}$$

Uzajamni odnos dveju ravni

Pod **uglom između ravni** $\alpha_1 :\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $\alpha_2 :\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ podrazumeva se ugao između njihovih vektora normala $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ i $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$.Ugao između ravni α_1 i α_2 je

$$\cos\angle(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{6.15}$$

Odnos između dve ravni može biti:

- $\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$;
- $\alpha_1 || \alpha_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} || \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$;
- $\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.

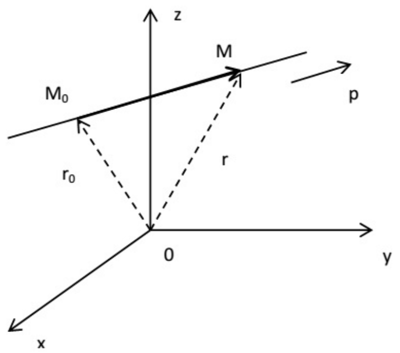
Ako se dve ravni seku po pravoj p, tada se skup svih ravni koje prolaze kroz tu pravu p naziva **svežanj ravni**. Jednačina svežnja ravni je

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

6.6.2 Jednačina prave u prostoru

Iz srednjoškolske geometrije znamo da je prava jednoznačno određena na nekoliko načina:

- dve različite tačke
- kroz datu tačku u pravcu datog vektora
- presek dveju ravni



Na osnovu Euklidove aksiome ("Kroz tačku van prave postoji samo jedna prava paralelna s tom pravom"), kroz datu tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$ u pravcu datog vektora $\vec{p} = (l, m, n)$ prolazi jedinstvena prava p. Neka je $M(x, y, z)$ proizvoljna tačka prave p kojoj odgovara vektor položaja $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Vektori $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r_0}$ i $\vec{p}$ su paralelni, dakle linearno zavisni, te postoji skalar $t \in \mathbb{R}$ tako da $\vec{r} - \vec{r_0} = t\vec{p}$, odnosno dobija se **parametarska jednačina prave**:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{p}. \tag{6.16}$$

Uslov paralelnosti vektora $\vec{r} - \vec{r_0}$ i $\vec{p}$ može se zapisati preko vektorskog proizvoda:

$$\vec{p} \times (\vec{r} - \vec{r_0}) = \vec{0},$$

odnosno ako označimo $\vec{p} \times \vec{r_0} = \vec{a}$, dobija se **opšta vektorska jednačina prave**:

$$\vec{p} \times \vec{r} = \vec{a}. \tag{6.17}$$

U koordinatnom obliku, jednačina 6.16 postaje **parametarska jednačina prave**:

$$x = x_0 + tl, \; y = y_0 + tm, \; z = z_0 + tn. \tag{6.18}$$

Prethodna jednačina se može zapisati u obliku

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{6.19}$$

koji se naziva **kanonska jednačina prave**.

Prava se može zadati i kao presek dveju ravni, pa se jednačina prave dobija iz sistema:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{6.20}$$

Uzajamni odnos dve prave

Neka su date prave

$$p_1 : \ \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},\ p_2 : \ \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

kroz tačku $M_1(x_1, y_1, z_1)$ u pravcu vektora (l_1, m_1, n_1), odnosno kroz tačku $M_2(x_2, y_2, z_2)$ u pravcu vektora (l_2, m_2, n_2), redom. Pod uglom između pravih p_1 i p_2 podrazumeva se ugao između vektora $\overrightarrow{p_1}$ i $\overrightarrow{p_2}$:

$$\cos\angle(p_1, p_2) = \frac{\overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{p_2}}{|\overrightarrow{p_1}||\overrightarrow{p_2}|} = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{6.21}$$

Sada imamo:

- $p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1} \perp \overrightarrow{p_2} \Leftrightarrow l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$
- $p_1 || p_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{p_1} || \overrightarrow{p_2} \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$.

Glava 7

Literatura

Ova skripta je nastala sa namerom da studentima sa Departmana za fiziku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu, Srbija, olakša savladavanje predmata Matematika 1. Prilikom njenog pisanja kao osnova korišćene su beleške sa predavanja prof. dr Snežane Živković-Zlatanović, kao i sledeća literatura:

1. M. P. Ušćumlić, P. M. Miličić: *Elementi više matematike 1*, Naučna knjiga, Beograd, 1988.

2. Lj. Kočinac, *Linearna algebra i analitička geometrija*, (drugo izdanje), Prosveta Niš, Niš, 1997.

3. Ž. Perović, *Algebra I*, Niš, 2002.

4. G. V . Milovanović, R. Ž. Đorđević, *Linearna algebra*, Elektronski fakultet, Niš, 2004.