Brakistakron problem

Anja Jakovljević

June 2019

1 Uvod

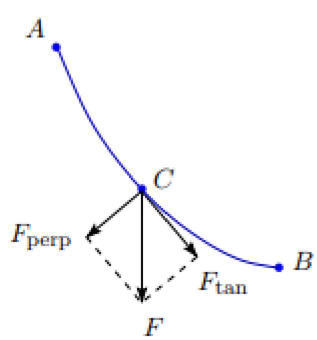
1.1 Istorijska pozadina

U Junu 1696. godine Johan Bernuli[1] se obratio najbrilijantnijim matematičkim umovima tog vremena pismom sledećeg sadržaja:

"Ništa nije tako privlačno inteligentnom čovjeku kao sto je izazovan problem čije potencijalno rješenje može donijeti slavu i ostati kao vječni spomenik. Sljedeći primjer Paskala[2], Fermaa [3] itd. nadam se da ću dobiti uvažavanje cijele naučne zajednice postavljajući ovaj problem pred najvećim matematičarima našeg vremena koji testira njihove metode i snagu njihovog intelekta. Ako mi neko kaže rješenje ovog problema, javno ću mu odati priznanje..."

Problem koji je on iznio je sljedeći:

Pretpostavimo da tačke A i B leže u vertikalnoj ravni, pri čemu je tačka A iznad, ali ne tačno iznad, tačke B. Žica koja povezuje ove dvije tačke je u obliku krive γ (Vidi sliku 1). Kuglica se kotrlja niz žicu od tačke A do tačke B. Na kuglicu ne djeluje ni jedna sila osim gravitacije, čak ni trenje. Zadatak je pronaći za koju krivu γ će kuglica doći od tačke A do tačke B za najkraće vrijeme.



Slika 1

Na prvo čitanje lako je previdjeti poentu problema. Svi znamo da je najkraći put koji povezuje tačke A i B segment $[A, B]$. Ali detaljnim čitanjem problema, možemo zaključiti da ne treba minimizovati dužinu krive γ, već vrijeme koje je potrebno loptici da ovu krivu pređe. Očigledno se radi o problemu optimizacije,

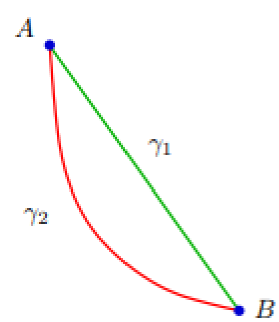
[1] Švajcarski matematičar

[2] Francuski matematičar, fizičar, pronalazač i katolički teolog

[3] Francuski matematičar i pravnik. Uz Rene Dekarta, jedan je od najznačajnijih matematičara francuske 17. vijeka.

jer se minimizovanje vremena vrši po svim mogućim krivama koje spajaju A i B.

Sa slike 1 vidimo da u svakoj tački C krive γ vektor sile gravitacije je razložen na komponentu Ftan, koja je tangenta na γ u tački C i komponentu Fperp koja je upravna na γ u C. Komponenta Fperp ne utiče na kretanje kuglice duž žice, već samo Ftan. Vektor F je isti u svakoj tački C krive γ (F = mg, gdje je m masa kuglice i g gravitaciono ubrzanje), ali Fperp i Ftan zavise od nagiba krive γ. Što je veći nagib, to je Ftan veće, pa se i kuglica kreće brže. Stoga je vjerovatno da ako se segment $[A, B]$ (označen na slici 2 sa $\gamma 1$) savije tako da formira krivu $\gamma 2$, prikazanu na slici 2, onda će dodatna brzina koju kuglica dobija kada se pusti niz krivu $\gamma 2$, nadoknaditi dodatno rastojanje koje prelazi i stići će do B za kraće vrijeme nego da je isla krivom $\gamma 1$. Kakvog god oblika bila, kriva koja je rešenje Bernulijevog problema se naziva brakistakron, od grčke riječi *brachistos* sto znači najkraći i *chronos* što znači vrijeme.



Slika 2

Naravno, Bernuli je već znao rješenje problema kada ga je objavio. Izazov su prihvatili njegov stariji brat Jakob Bernuli[1] [1654–1705], Godfrid Lajbnic[2] [1646–1716], Gijom de Lopital[3] [1661–1704] i Isak Njutn[4] [1642–1727], od kojih je svako objavio rješenje problema. Njihova rješenja se slažu, i ako se tehnike kojima su do njega došli u mnogome razlikuju. Problem brakistakrona je od istorijske važnosti, jer je privukao pažnju naučnika na probleme ovog tipa, čime je doslo do razvoja ideja i tehnika koje su dovele do osnivanja nove grane matematike - varijacionog računa.

[1] Švajcarski matematičar. Najveći doprinos je dao u polju vjerovatnoće gdje je izveo prvu verziju Zakona velikih brojeva

[2] Njemački matematičar. Jedan od osnivača diferencijalnog i integralnog računa

[3] Francuski matematičar čije se ime najčešće vezuje za Lopitalovo pravilo za računanje graničnih vrijednosti neodređene forme

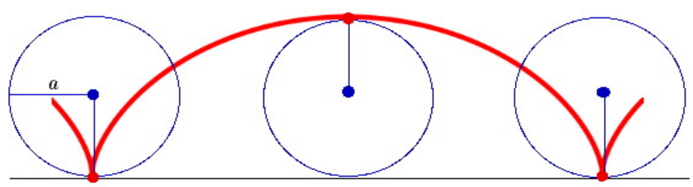
[4] Engleski matematičar, fizičar, astronom i teolog. Smatra se jednim od najvećih ličnosti u istoriji nauke

Iako su svi pomenuti matematičari poslali svoja rješenja problema niko od njih nije to uradio u predviđenom roku. Naime, u pomenutom pismu Bernuli je odredio rok od 6 mjeseci za rješenje. Kako ni jedno rješenje nije stiglo u predvidjenm roku na Lajbnicovu inicijativu rok je produžen za jos 6 mjeseci. U ovom periodu objavljeno je Lajbnicovo rješenje i još jedno koje je bilo anonimno. Čitajući ga, Bernuli je navodno rekao da prepoznaje lava po njegovoj šapi, aludirajući na Isaka Njutna. Kasnije se zaista ispostavilo da je ovo Njutnovo rješenje, a razlog za anonimnost je taj što Njutn nije blagonaklono gledao na izazove onih koje smatra ispod sebe, što je kasnije sam i objasnio.

Napomenimo da se već 1638. godine prije Bernulija ovim problemom bavio i Galileo Galilej[1][1564–1642]. Međutim, došao je do pogrešnog rješenja da je tražena kriva luk kružnice.

1.2 Istorija cikloide i neke njene osobine

Cikloida je put koji opisuje proizvoljna fiksirana tačka sa kružnice koja se kotrlja po pravoj liniji koju nazivamo bazom (Slika 3).



Slika 3

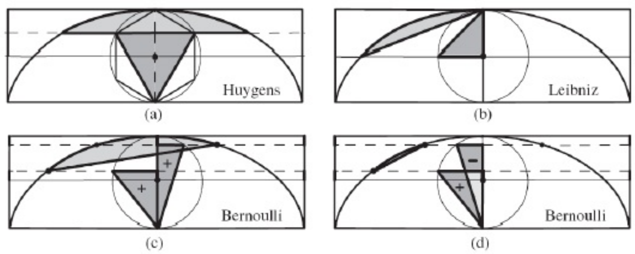
Da bi razlikovali slučaj kada je cikloida iznad ili ispod baze, razlikujemo konveksnu i konkavnu cikloidu.
Galilej se prvi ozbiljno bavio izučavanjem cikloida i upravo on je dao ime cikloida ovoj krvoj 1599. godine. On je pokušao da odredi površinu ispod jednog njenog luka, ali bezuspješno. Nije uspio da pronađe matematički metod, te je izrezao komadiće metala u obliku površine ispod cikloide i upoređivao težinu sa težinom kruga koji generise cikloidu. Dosao je do rezultata da je cikloida teža oko tri puta od kruga, ali je on odbio da prihvati ovaj rezultat jer je vjerovao da odnos između ove dvije težine, treba da bude iracionalan. Ispostavilo se da je Galilejev eksperimenat zaista dao tačan rezultat.

Roberval je 1628. godine odredio površinu cikloide koristeći novi metod "beskonačno malih", koji je razvijen od strane Kavalijerija , Ferma i Dekarta, kao i Robervala, međutim svaki od njih je pronašao drugačiji metod za povlačenje

[1] Italijanski matematičar, fizičar, astronom i filozof čija su istraživanja postavila temelje modernoj mahanici i fizici

tangente na ovu krivu. Torićeli, učenik Galileja je 1644. godine objavio svoje otkriće o površinama i tangentama cikloida.

Cikloida je, u tom dobu, bila jedna od najpopularnijih problema matematike, mnogi sporovi i ljubomore su nastale vezani za nju, zato je postala poznata po imenu "Helena geometričara". U skladu sa Arhimedovom tradicijom, Hajgens, Lajbnic i Johan Bernuli su tražili posebne djelove regiona cikloide čije su površine jednostavnog pravolinijskog oblika.



Slika 4

Slika 4 ilustruje njihovu zajedničku stavku. Svaki cikloidni luk je opisan jednim pravougaonikom koji je prepolovljen po horizontalnoj srednjoj liniji, sa kotrljajućim krugom u centru.
Godine 1658. Hajgens je pokazao da dio cikloide odsječen isprekidanom linijom na slici 4 (a), koja polovi gornju polovinu pravougaonika, ima površinu jednaku polovini upisanog pravilnog šestougla u kotrljajući krug, ili ekvivalentno - jednaka površini osjenčenog jednakostraničnog trougla upisanog u isti krug.
Lajbnic je 1678. dokazao da segment cikloide na slici 4 (b) ima istu površinu kao i osjenčeni pravougli trougao, ciji su kraci jednaki poluprečniku kruga.
Zatim je 1699. Bernuli proširio oba rezultata, koristeći dvije horizontalne isprekidane linije, jednako udaljene od srednje i gornje linije kao što je na slici 4 (c) i (d). On je dokazao da je površina segmenta cikloide na slici 4 (c) zbir površina dva osjenčena pravougla trougla, dok je manji segment cikloide na slici 4 (d) predstavlja razliku površina pravouglih trougla. Dijagram na slici 4 (c) se pojavljuje na naslovnim stranicama sva četiri toma sabranih djela Bernulija.

Navedimo sada parametarku jednačinu cikloide. Cikloida kroz koordinatni početak cija je horizontalna baza prava $y = 0$, generisana kružnicom pokuprečnika r koji se kotrlja na pozitivnoj strani baze ima parametarske jednačine:

$$x(t) = r(t - \sin t), y(t) = r(1 - \cos t)$$

gdje je r ugao rotacije kotrljajućeg kruga.

2 Rješenje problema varijacionim računom

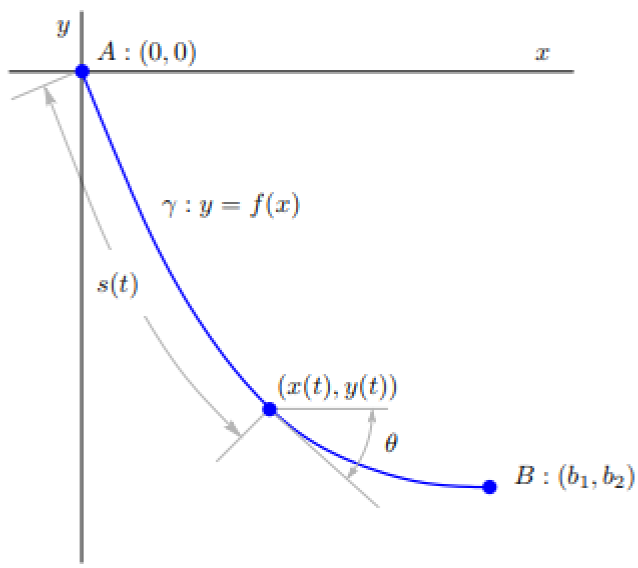
Započnimo nasu studiju datog problema izvođenjem formule koja povezuje izbor krive γ sa vremenom potrebnim kuglici da dodje iz tačke A u tačku B pod uticajem gravitacije (ovo vrijeme zovemo tranzitnim vremenom). Ako koordinatni početak Dekartovog sistema postavimo u tačku A sa horizontalnom x-osom (Slika 5) svaka relevantna kriva γ ce biti grafik neke funkcije $f(x)$ koja zadovoljava uslov $f(x) \leq 0$. Neka je t vremenska varijabla, tako da $t = 0$ označava momenat kada je kuglica krenula iz tačke A. Označimo sa $s = s(t)$ rastojanje duž krive γ koje kuglica pređe za vrijeme t i sa $v = v(t)$ brzinu kretanja kuglice u trenutku t. Pod pretpostavkom da je f diferencijabilna imamo:

$$s(t) = \int_0^{x(t)} \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

i $v(t) = s^{'}(t)$. Pa prema Njutn-Lajbnicovoj teoremi imamo:

$$v(t) = \sqrt{1 + f'(x(t))^2} x^{'}(t) \tag{1}$$

Zbog pretpostavke da nema trenja ukupna energija u trenutku t je ista kao



Slika 5

ukupna energija u trenutku $t = 0$, koju možemo uzeti da je jednaka 0. Kako je kinetička energija jednaka $\frac{1}{2}mg^2$ a potencijalna mgh, gdje je h visina iznad x-ose imamo:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = 0$$

pa dobijamo:

$$v = \sqrt{-2gf(x)} \tag{2}$$

(prisjetimo se da je $f(x) \leq 0$). Formulu (2) prvi put je izveo Galileo Galileji. Kombinujući (1) i (2) dobijamo sljedeću diferencijalnu jednačinu:

$$\sqrt{-2gf(x)} = \sqrt{1 + f'(x(t))^2}\frac{dx}{dt}$$

Ova se jednačina može riješiti metodom razdvojenih promjenljivih. Ako je T tranzitno vrijeme onda važi:

$$T = \int_T^0 dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{b_1} \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{-f(x)}} dx \tag{3}$$

Primjetimo da je ovo nesvojstveni integral, pošto je $f(0) = 0$, čak štaviše ako $f(x)$ ima vertikalnu tangentu u $x = 0$ onda $f^{'}(0)$ ne postoji.

Kako bi smo se bolje upoznali sa formulom (3) pretpostavimo da tačka B ima koordinate $(1, -1)$ i normalizujmo gravitaciono ubrzanje na $g = \frac{1}{2}$. Segment koji povezuje tačke A i B leži na pravoj $y = f(x) = -x$. Sada lako možemo izračunati (3):

$$T = \int_1^0 \sqrt{\frac{2}{x}} dx = 2\sqrt{2} = 2.828427$$

Ako bi γ bila kružni luk sa vertikalnom tangentom u tački A, onda bi važilo:

$$f(x) = -\sqrt{1 - (x-1)^2}$$

tj.

$$T = \int_1^0 \frac{1}{\sqrt[4]{(2x - x^2)^3}} dx = 2.622058$$

Dobili smo poboljšanje od oko 7%, što pokazuje da najkraći put ne donosi najkraće vrijeme. Ako bi sada γ bila luk parabole sa vertikalnom tangentom u tački A onda bi $f(x) = -\sqrt{x}$ tj.:

$$T = \frac{1}{2} \int_1^0 \frac{\sqrt{1 + 4x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx = 2.587229$$

Ovo je za nijansu bolje od kružnog luka, ali da li je to najbrže rješenje? Umjesto da pokusavamo jednu krivu za drugom primjetimo sličnost između problema brakistakrona i ostalih problema optimizacije i pokušajmo to da iskoristimo. U našem slučaju za fiksirane tačke $A : (0, 0)$ i $B(b_1, b_2)$ imamo kolekciju funkcija kandidata F, to su sve one funkcije koje su diferencjabilne i čiji grafici prolaze kroz obije tačke A i B. Svakoj funkciji f iz familije F dodjeljujemo jedan realan broj T vodeći se formulom (3). Ovim smo definisali mapiranje J između familije F relevantnih funkcija na skup $\mathbb{R}$ realnih brojeva. Ovakvo mapiranje se naziva funkcional. Problem brakistakrona se sada može postaviti kao:

Pronađi funkciju $\hat{f}$ koja minimizuje funkcional

$$T = J[f] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{b_1} \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{-f(x)}} dx \tag{4}$$

pod uslovima da je $f(0) = 0$ i $f(b_1) = b_2 < 0$.

Napravimo paralelu između brakistakrona i problema koji nam je od ranije poznat iz analize: za dati fiksirani skup brojeva N i fiksiranu funkciju $j(x)$ treba pronaći broj $\hat{x}$ koji minimizuje (ili maksimizuje) funkciju $j(x)$. Ovaj smo problem rješavali znajući činjenicu da je izvod $f^{'}$ jednak nuli u tačkama ekstremuma $\hat{x}$ tj. $f^{'}(\hat{x}) = 0$. Kako bi ovu ideju proširili i na funkcional podsjetimo se da izvod $j^{'}(\hat{x})$ možemo posmatrati kao jedinstven broj za koji važi da za sve dovoljno male, ne nulte brojeve h ostatak

$$R(\hat{x}, h) = (j(\hat{x} + h) - j(\hat{x})) - j^{'}(\hat{x})h \tag{5}$$

ima osobinu da

$$\lim_{h \to 0} \frac{|R(\hat{x}, h)|}{|h|} = 0 \tag{6}$$

Pogledajmo jedan mogući oblik jednačine (5) za opšti slučaj funkcionala $J[f]$

$$R(\hat{f}, h) = \Big(J(\hat{f} + h) - j(\hat{f})\Big) - J^{'}(\hat{f})h \tag{7}$$

Da li ova jednačina ima smisla? Da bi bilo tako, objekat h sada mora biti funkcional. Da h nije nula znači da se mora razlikovati od konstantne nula funkcije. Takođe je logično definisati mjeru:

$$||h|| = max\{|h(x) : x \in [a_1, b_1]|\}$$

Ali šta cemo sa poslednjim termom u formuli (7)? Svi drugi termi na desnoj strani (7) su realni brojevi, pa bi i krajnji desni term takođe trebao biti realan broj. Podsjetimo se da smo krajnji desni term u (5) mogli posmatrati kao linearni operator nad brojem h, pa bi i krajnji desni term u jednačini (7) trebao biti linearni operator nad funkcijom f koji kao rezultat ima realan broj, tj. trebao bi biti linearni funkcional. Tako da oblik jednačine (5) za opšti slučaj funkcional $J[f]$ ne bi trebao biti (7) već:

$$R_{\hat{f}}[h] = \Big(J[\hat{f} + h] - J[\hat{f}]\Big) - D_{\hat{f}} J[h] \tag{8}$$

gdje je $D_{\hat{f}} J[h]$ linearni funkcional, čak štaviše za funkcije h_1 i h_2 i proizvoljna dva realna broja c_1 i c_2 važi:

$$D_{\hat{f}} J[c_1 h_1 + c_2 h_2] = c_1 D_{\hat{f}} J[h_1] + c_2 D_{\hat{f}} J[h_2] \tag{9}$$

Analogija uslovu (6) bi bio uslov:

$$\lim_{||h||\to 0} \frac{|R_{\hat{f}}[h]|}{||h||} = 0 \tag{10}$$

Zaključak je da za dati funkcional J, njegov izvod tj. prva varijacija u funkciji $\hat{f}$ je linearni funkcional $D_{\hat{f}}J[h]$ takav da je $R_{\hat{f}}[h]$ funkcional definisan sa (8) i koji zadovoljava uslov (10). Ovu definiciju je zapravo formulisao Josef Lagranž[1] 1755. godine. U potpunoj analogiji sa odgovarajućom teoremom iz analize važi i sledeće tvrđenje.

Teorema 1 *Ako $\hat{f}$ minimizuje ili maksimizuje J onda je $D_{\hat{f}}J$ nulti funkcional tj. za svaku funkciju h važi $D_{\hat{f}}J[h] = 0$*

Stoga nam je taktika za rješavanje brakistrakron problema da izračunamo prvu varijaciju $D_{\hat{f}}J$ za funkcional (4) i onda da pronađemo funkciju $\hat{f}$ za koju je nula

Funkcional koji se pojavljuje u formuli (4) je specijalan slučaj opštije forme:

$$J[f] = \int_a^b I(x, f(x), f^{'}(x))dx \tag{11}$$

gdje je I funkcija $I(x, y, z)$ tri promjenljive i to x, $f(x)$, $f^{'}(x)$. Zaista za funkcional iz (4)

$$I(x, y, z) = \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{2g}\sqrt{-y}} \tag{12}$$

Primjetimo da se x ne pojavljuje u (11), ova će činjenica biti važna kasnije.

Tejlorova teorema za funkcije više promjenljivih, kada se primjeni na funkciju I u tački (x_0, y_0, z_0) iz domena I za male inkremente u, v i w generise formulu:

$$\begin{gathered} I(x_0 + u, y_0 + v, z_0 + w) \\ = I(x_0, y_0, z_0) + I_x(x_0, y_0, z_0)u + \\ I_y(x_0.y_0.z_0)v + I_z(x_0, y_0, z_0)w + ... \end{gathered}$$

gdje indeksi označavaju parcijalne izvode. Stoga za funkcional J iz (11) i funkcije f i h važi:

$$\begin{aligned} J[f+h] - J[f] &= \int_a^b I(x, f(x) + h(x), f^{'}(x) + h^{'}(x)) - I(x, f(x), f^{'}(x))dx \\ &= \int_a^b I_y(x, f(x), f^{'}(x))h(x) + I_z(x, f(x), f^{'}(x))h^{'}(x)dx + ... \end{aligned} \tag{13}$$

[1]Italijansko-francuski matematičar i astronom koji je dao veliki doprinos na svim poljima analize i teorije brojeva kao i klasične i nebeske mehanike. Smatra se jednom od najvećih matematičara 18.vijeka

Prisjetimo se da se familija F, funkcija na koje se može primijeniti funkcional J iz (4), sastojala iz diferencijabilnih funkcija čiji grafici prolaze kroz tačke A i B. Kako je funkcija $\hat{f}+h$ iz familije F, to njen grafik prolazi kroz tačke A i B pa važi $h(0)=h(b_1)=0$. Isto važi i u opštem slučaju tj. kako bi funkcional J iz (11) mogao da djeluje na f i $f+h$ kao u (13) mora da važi $h(a)=h(b)=0$. Primjenom parcijalne integracije na drugi term poslednjeg integrala formule (13) sa smjenom $u=I_z(x,f(x),f^{'}(x))$ i $dv=h^{'}(x)dx$ dobijamo:

$$\int_a^b I_z(x,f(x),f^{'}(x))h^{'}(x)dx=-\int_a^b \frac{d}{dx}(I_z(x,f(x),f^{'}(x)))h(x)dx$$

Tako da (13) sada postaje:

$$J[f+h]-J[f]=\int_a^b \left(I_y(x,f(x),f^{'}(x))-\frac{d}{dx}(I_z(x,f(x),f^{'}(x)))\right)h(x)dx+...$$

zaključujemo da prva varijacija od J u f, $D_fJ[h]$ je nula za svaku funkciju $h(x)$ akko $f=\hat{f}$ zadovoljava jednačinu:

$$\frac{d}{dx}\left(I_z(x,f(x),f^{'}(x))\right)=I_y(x,f(x),f^{'}(x)) \tag{14}$$

Funkcija $f=\hat{f}$ koja je rješenje brakistakron problema zadovoljava jednačinu (14) kada je I funkcija data sa (12). Kako se x eksplicitno ne pojavljuje u I korisno je diferencirati izraz $f^{'}(x)I_z(x,f(x),f^{'}(x))-I(x,f(x),f^{'}(x))$ po x.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(f^{'}(x)I_z(x,f(x),f^{'}(x))-I(x,f(x),f^{'}(x))\right)\\
&=f^{''}(x)I_z(x,f(x),f^{'}(x))+f^{'}(x)\frac{d}{dx}\left(I_z(x,f(x),f^{'}(x))\right)\\
&\quad -0-I_y(x,f(x),f^{'}(x))f^{'}(x)-I_z(x,f(x),f^{'}(x))f^{''}(x)\\
&\quad =f^{'}(x)\left[\frac{d}{dx}\left(I_z(x,f(x),f^{'}(x))\right)-I_y(x,f(x),f^{'}(x))\right]
\end{aligned}$$

tako da je ne konstantna funkcija f rješenje (14) akko

$$f^{'}(x)I_z(x,f(x),f^{'}(x))-I(x,f(x),f^{'}(x))\equiv constant. \tag{15}$$

Vratimo se na notaciju $y=f(x)$ i $y=f^{'}(x)$

$$z\frac{z}{\sqrt{2g}\sqrt{-y(1+z^2)}}-\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{2g}\sqrt{-y}}\equiv constant.$$

sto se može svesti na:

$$y(1+z^2)\equiv constant.$$

Znači da je rješenje brakinstakron problema $y = f(x)$ rješenje Košijevog zadatka:

$$y\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = C \tag{16}$$

i $f(0) = 0$ i $f(b_1) = b_2$. jednačina (16) se metodom razdvojenih promjenljivih može svesti na oblik:

$$x = a\ arccos(1 - \frac{1}{a}y) - \sqrt{2ay - y^2}$$

gdje je $a = \frac{1}{2}C$. Međutim, mnogo je pametnije parametrizovati krivu γ. Kako bi smo to uradili, podsjetimo se da je $\frac{dy}{dx} = tan\theta$ (vidi sliku 5). koristeći relaciju $1 + tan^2\theta = sec^2\theta$ i uzimajući da je konstanta C iz (16) u obliku $C = -2R$, $R > 0$ transformisemo (16) u $y\ sec^2\theta = -2R$ ili:

$$y = -2Rcos^2\theta = -R(1 + cos(2\theta)) \tag{17}$$

zatim

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{d\theta} = cot\theta\ 2Rsin(2\theta) = \frac{cos\theta}{sin\theta}\,(4R\ sin\theta cos\theta) = 2R(1 + cos(2\theta))$$

Integraljenjem ove jednačine dobijamo $x = 2R\theta + Rsin(2\theta) + S$. Ako uzmemo da je $u = 2\theta$ i prisjećajući se jednačine (17) dobijamo traženu parametrizaciju krive γ:

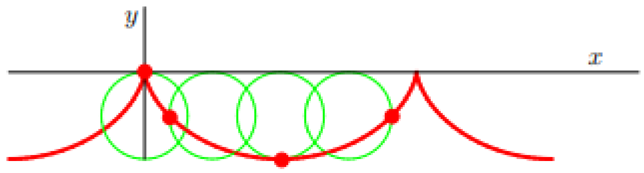
$$\begin{aligned} x &= R(usin\, u) + S \\ y &= -R(1 + cos\, u) \end{aligned} \tag{18}$$

Ako je u_0 takvo da $(x(u_0), y(u_0)) = (0, 0)$, onda kako R nije nula koristeći drugu jednačinu iz (18) zaključujemo da je $cos(u_0) = -1$. Mi biramo $u_0 = -\pi$ pa je po prvoj jednačini u (18) $S = \pi R$. Tražeći količnik dvije jednačine iz (18) dobijamo da bilo koja vrijednost $u_1 > u_0$ od u za koju $(x(u_1), y(u_1)) = (b_1, b_2)$ mora zadovoljavati $q_0(u_1) = -\frac{b_1}{b_2} > 0$, gdje je

$$q_0(u) = \frac{u + sin\, u + \pi}{1 + cos\, u}$$

u tački $(-\pi, \pi)$. Lako se može pokazati da je $q_0(u)$ monotono rastuća na $(-\pi, \pi)$, kao i $\lim_{u\to\pi^+} q_0(u) = 0$, $\lim_{u\to\pi^-} q_0(u) = +\infty$, tako da za svako $-\frac{b_1}{b_2} \in \mathbb{R}^+$ postoji jedinstvena vrijednost u_1 od u na $(-\pi, \pi)$ takva da $q_0(u_1) = \frac{b_1}{b_2}$. Iz ovoga slijedi da ako za R izaberemo $R = \frac{-b_2}{1+cos\, u_1}$ druga jednačina u (18) sa $u = u_1$ i $y = b_2$ generise $(x(u_1), y(u_1)) = (b_1, b_2)$. Ako svuda uvrstimo $u = \theta - \pi$ onda (18) postaje

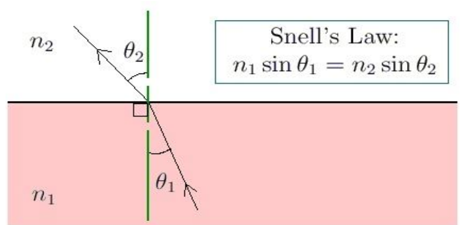
$$\begin{aligned} x &= R(\theta - sin\theta) \\ y &= -R(1 - cos\theta) \end{aligned} \tag{19}$$



Brakistakron kriva (cikloida)

3 Bernulijevo rješenje

Bernulijevo rješenje zasnivalo se na Fermaovom principu koji kaže da je zakon prirode takav da se svjetlost uvijek kreće putem najkraćeg vremena i koji za posledicu ima da se svjetlosni zrak prolazeći iz rjeđe u gušću sredinu mora reflektovati prema normali, kako bi pratio putanju najkraćeg vremena. Iz ovoga se dolazi do takozvanog Snelovog zakona koji kaže da je odnos sinusa upadnog ugla $\theta 1$ i sinusa ugla prelamanja $\theta 2$ obrnuto proporcionalan odnosu gustina dveju sredina, odnosno direktno proporcionalan odnosu brzina kojima se zrak prostire kroz sredine (Slika 6).



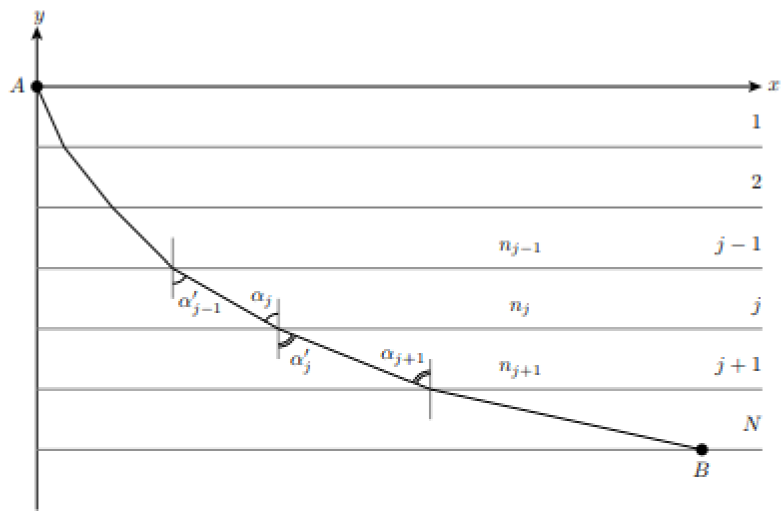
Slika 6

Bernuli u svom rješenju posmatra prozirni medijum, koji je sastavljen od velikog broja horizontalnih traka rastuće (ili opadajuće) gustine, pri cemu se gustine mijenjaju glatko u graničnom slučaju kada broj traka raste. Iz prethodnog paragrafa je jasno da se zrak (koji posmatramo kao česticu i koji ovdje igra ulogu kuglice) kroz ovakav medijum kretati po nekoj krivoj, pri čemu će se ugao mijenjati kako zrak bude prolazio kroz različite trake. Međutim, i ako je cjelokupna putanja zraka kriva, putanja u okviru jedne trake je prava linija jer zrak svjetlosti u homogenom medijumu se kreće pravom linijom koju prelazi konstantnom brzinom, pa je cjelokupna putanja dio po dio linearna. Sada se problem svodi na pitanje kako se upadni ugao mijenja pri prelasku iz trake u traku. Neka je v_j brzina zraka u traci j i α_j odgovarajući upadni ugao, i neka su v_{j+1} i $\alpha_j^{'}$ brzina i ugao prelamanja zraka u sledećoj traci, tada po Snelovom zakonu imamo:

$$\frac{v_j}{sin\alpha_j} = \frac{v_{j+1}}{sin\alpha_j^{'}}$$

Kako su trake i normale paralelne, onda $\alpha_j^{'}$ i α_{j+1} (upadni ugao u traku j + 1) čine par Z uglova (vidi sliku 7), pa su stoga jednaki, tj. važi:

$$\frac{v_j}{sin\alpha_j} = \frac{v_{j+1}}{sin\alpha_{j+1}}$$



Slika 7

Odavde zaključujemo da je:

$$\forall j \;\; \frac{v_j}{sin\alpha_j} = const. \tag{20}$$

U graničnom slučaju, kako trake postaju beskonačno tanke,ove prave se približavaju traženoj brakistakron krivoj i u svakoj tački ugao koji prava zaklapa sa vertikalom postaje ugao koji tangenta na krivu zaklapa sa vertikalom. Pri tome ako uzmemo da je $v(x, y)$ brzina u tački (x, y) i α ugao koji tangenta u toj tački zaklapa sa vertikalom iz (20) imamo da važi:

$$\frac{v}{sin\alpha} = const. \tag{21}$$

Kako je Galileo pokazao za brzina v u tački (x, y) zadovoljava:

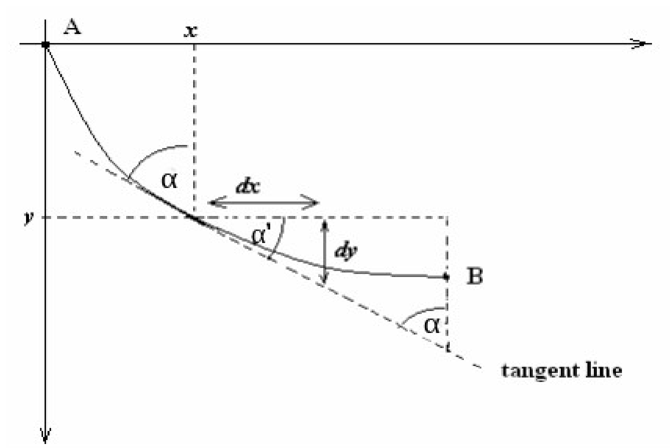
$$v = \sqrt{2gy} \tag{22}$$

gdje je g gravitaciona konstanta. Iz (21) i (22) dobijamo:

$$\frac{\sqrt{y}}{sin\alpha} = const$$

tj.

$$y = k^2 sin^2\alpha \tag{23}$$



Slika 8

Sa slike 8 vidimo da je:

$$\sin\alpha = \cos\alpha^{'} = (\frac{1}{1+(tg\alpha^{'})^2})^{\frac{1}{2}} = (\frac{1}{1+(\frac{dy}{dx})^2})^{\frac{1}{2}}$$

pa je : $sin^2\alpha = \frac{1}{1+y^{'2}}$ pa primjenjujući na (23) dobijamo jednačinu:

$$y(1+y^{'2}) = 2h \tag{24}$$

gdje je $h = \frac{1}{2}k^2$

Cikloida $x(t) = h(t - sint)$, $y(t) = h(1 - cost)$ zadovoljava jednačinu (24), sto se vidi iz sledećih relacija:

$$y^{'} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{-sint}{1-cost}$$

slijedi

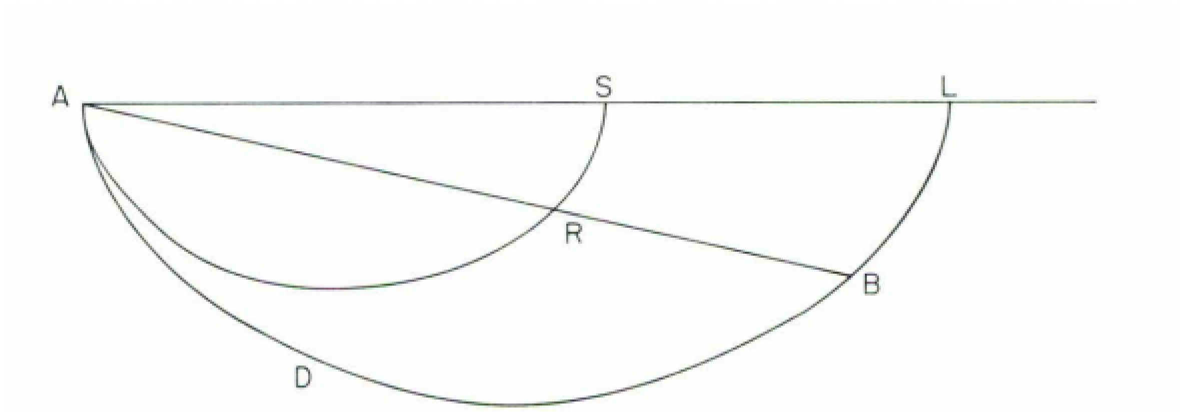
$$y(1+y'^2) = h(1-cost)\left(1+\frac{sin^2t}{(1-cost)^2}\right) =$$

$$h\left(1-cost+\frac{sin^2t}{1-cost}\right) =$$

$$\frac{h((1-cost)^2+sin^2t)}{1-cost} =$$

$$\frac{h(2-2cost)}{1-cost} = 2h$$

Ovim problem nije u potpunosti riješen, jer za datu tačku A nismo opisali brakistakron krivu, tj. cikloidu koja prolazi kroz drugu izabranu tačku B. Ova se kriva lako nalazi sledećim metodom (slika 9): kroz date tačke A i B povucimo pravu liniju $\overline{AB}$. Proizvoljna cikloida sa početkom u A i bazom na horizontali $\overline{AS}$ siječe pravu $\overline{AB}$ u tački R. Cikloida koja je rješenje problema će biti generisana krugom čiji je prečnik jednak prečniku proizvoljne cikloide pomnožen sa četvrtim stepenom odnosa duži $\overline{AR}$ i $\overline{AB}$.



Slika 9

4 Hajgensov tautakron

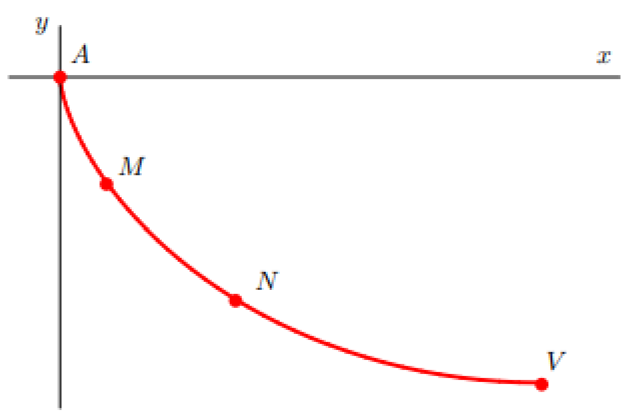
Izračunajmo sada tranzitno vrijeme koje je potrebno kuglici da dodje iz tačke $A(0,0)$ u tačku $B(1,-1)$) duz brakistakron krive (cikloide) i uporedimo je sa tranzitnim vremenom za segment $[A, B]$ i lukom parabole koje smo izračunali u Sekciji 3 (Vidi rješenje problema varijacionim računom) pri cemu smo uzeli da je gavitaciono ubrzanje normlizovano na $\frac{1}{2}$. Uvodeći smjene $x = \alpha(v)$, $y = \beta(v)$ u (3) ili ponovnim izvođenjem formule (3) za slučaj kada je kriva γ predstavljena parametarskim jednačinama $(\alpha(v), \beta(v))$, $v_0 \leq v \leq v_1$ a ne kao grafik funkcije $y = f(x)$, dobija se sledeći oblik formule (3):

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{v_0}^{v_1} \sqrt{\frac{\alpha'(v)^2 + \beta'(v)^2}{\sqrt{-\beta(v)}}} dv \tag{25}$$

Parametrska jednačina cikloide koja povezuje tačke $A(0,0)$ i $B(1,-1)$ su $\alpha(t) = h(t - sint)$, $\beta(t) = h(1 - cost)$,$0 \leq t \leq t_0$, pri cemu je t_0 jedinstveno rješenje jednačine $\frac{t - \sin t}{1 - \cos t}$ na $(0, 2\pi)$,a $h = \frac{1}{1 - \cos t_0}$. računajuci integral u formuli (19) za ovako izabrane $\alpha(t), \beta(t)$ dobija se vrijednost $\sqrt{2h}$, tj. $T = \sqrt{2h}t_0$. koristeći neke metode pribliznog računanja dobija se da je $t_0 = 2.4120111439135253425$ i $h = 0.57291703753175033696$ pa za brakistakron krivu imamo:

$$T = 2.581905$$

što je poboljšanje od oko 9% u odnosu na segment i oko $\frac{2}{10}$ od 1% u odnosu na luk parabole.



Slika 10
Tautakron

Napomenimo da brakistakron ima jos jednu impresivnu osobinu. Naime, brakistakron je i tautakron,tj. zadovoljava sledeće: ako sa V označimo najnižu tačku cikloide i ako istovremeno pustimo kuglice da se iz stanja mirovanja kotrljaju sa različitih tačaka A, M, N na istoj cikloidi (Slika 10) one će u istom trenutku doći u tačku V. Ovu činjenicu je otkrio Kristijan Hajgens[1][1629–1695] i koristio je pri dizajniranju sata sa klatnom. Zbog činjenice da je njegov brakistakron ujedno u tautakron Bernuli je izjavio:

"Prije nego što završim moram iskazati divljenje koje osjećam zbog neočekivanog poklapanja Hajgenskovog tautakrona i mog brakistakrona. Posebno smatram izvanrednim činjenicu da ta slučajnost važi zahvaljujući Galilejovoj hipotezi koja nam je omogućila da dokažemo njenu istinitost. Priroda teži da djeluje na najjednostavniji mogući način, pa je pri tom dozvolila da ista kriva ima dvije različite funkcije pri čemu bi pod bilo kojom drugom hipotezom za to sigurno bile potrebne dvije krive..."

Spisak literature

[1] MIGUEL DE ICAZA HERRERA: The Brachistochrone: Galileo, Bernoulli, Leibniz and Newton around the brachistochrone problem
`https://rmf.smf.mx/pdf/rmf/40/3/40`$_{34}59.pdf$

[2] Douglas S. Shafer: The Brachistochrone: Historical Gateway to the Calculus of Variations
`http://mat.uab.cat/matmat/PDFv2007/v2007n05.pdfl`

[3] J J O'Connor and E F Robertson: The brachistochrone problem,
`https://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Brachistochrone.html`

[4] Radhakrishnamurty Padyala : Brachistochrone – The Path of Quickest Descent,
`https://www.ias.ac.in/article/fulltext/reso/024/02/0201-0216`

[5] Jeff Babb and James Currie : The Brachistochrone Problem: Mathematics for a Broad Audience via a Large Context Problem
`https://scholarworks.umt.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1099context=tme`

[6] MARKUS GRASMAIR: BASICS OF CALCULUS OF VARIATIONS:
`https://wiki.math.ntnu.no/`$_{m}edia/tma4180/2015v/calcvar.pdf$

[7] Feynman: Optics- The Principle of Least Time:
`http://www.feynmanlectures.caltech.edu/I`$_{2}6.html$

[8] Michael Stevens (vsouce channel): The Brachistochrone:
`https://www.youtube.com/watch?v=skvnj67YGmwt=1354s`

[1] Holandski matematičar, astronom i fizičar