Georg Cantor

8. travnja 2020.

Naš cilj u ovom radu jeste da na pravilan ali nažalost skroman način obuhvatimo značaj rada velikog Georga Fridriha Kantora. U tom cilju, razdvojićemo ovaj rad na dio koji će biti pozabavljen karakterom i životom ovog velikog matematičara kao i njegov suštinski doprinos zasnivanju teorije skupova, koja je kasnije umnogome uobličila savremenu logiku. Ne zaboravimo da rečemo da je rad ovog naučnika na području matematike daleko šireg značaja i ogromnim dijelom se tiče savremene filozofije i teologije, što je podatak kojega je Kantor sam svjestan bio

Iako je uobičajeno da se naučni rad pojedinca ne dovodi u vezu sa ličnim životom, u ovom slučaju moramo napraviti izuzetak. Kantor je kao predani hrišćanin luteranac živio u uvjerenju da je njegov teoriju o transfinitnim brojevima, koju ćemo spomenuti, njemu upravo od Boga saopštena. Kako ćemo se uvjeriti, takav pristup naučnoj djelatnosti koji počiva na dubokom proživljanju vlastitih zaključaka uvešće Kantora duboko duhovno rastrojstvo - tim prije zbog zbog tretmana koji je pretrpio od tadašnje naučne javnosti.

Naučna djelatnost

Uzima se kao da period Kantorov rad 1874. pa do 1884. predstavlja utemeljivanje teorije skupova kao posebne grane matematike. Prije njegovih istraživanja, koncept skupa je shvatan veoma elementarno i nije doživio nikakav skoro iskorak još od Aristotelovog shvatanja skupa. Teorija skupova niko nije ozbiljno uzimao i smatralo se da ona skoro pa ima isključivo trivijalan sadržaj. Štaviše, prije Kantora skup je nešto konačne dok je pojam beskonačnosti prije smatran predmetom filozofskog nego li matematičkog istraživanja. Dokazavši da postoji beskonačno mnogo "veličina" za beskonačne skupove, Kantor je ustanovio netrivijalnost ovoga područja i da postrek za dalje izučavanje. Teorija skupova kasnije igrala ključnu ulogu u teoriji zasnivanja moderne matematike, u tome smislu što ona tako tumači tvrđenja o matematičkim objektima da ih istovremeno ugrađuje u jedinstvenu teoriju. Takvim postupkom, ona nas opskrbi standardnim skupom aksioma kako bismo nešto dokazali ili opovrgli. Ovaj osnovni koncept teorije skupova danas je u matematici sveprisutan.

Mi ćemo se hronološki a djelimično i anahrono (u smislu da ćemo razmatrati kasnijeg razvoja njegovih početnih zamisli) osvrnuti na Kantorov rad. Pritom posebnu pažnju posvećujemo njegovom prvom naučnom radu iz 1874. godine koji je, kako se ispostavlja iz prepiske između Kantora i Dedekinda, uprkos naslovu po kojem je glavni predmet prebrojivost algebarskih brojeva zapravo odnosi na neprebrojivost skupa realnih brojeva. Ovo je, za ono vrijeme, zapanjujući rezultat koji tek mali dio naučne javnosti mogao prihvatiti. Razlog je jednostavan: bilo se naklonjeno mnjenju da je skup realnih brojeva prebrojiv zbog osobine jednog prebrojivog skupa (skupa racionalnih brojeva) da bude svuđe gust u njemu.

1 Teorija skupova

Tradicionalno se smatra da je Kantor udario temelje teorije skupova člankom pod naslovom "O osobenosti skupa svih realnih algebarskih brojejeva" iz 1874. godine. U ovom dijelu upravo ćemo izložiti sažetak ovog manje-više kratkog članka. Ovaj rad je utoliko značajniji što je njime pokazano da se skup realnih brojeva neprebrojiv iako ne ekplicitno ali je jasna posljedica druge teoreme iz ovoga članka. Ovakav dokaz neprebrojivosti skupa realnih brojeva umnogome se razlikuje od onog daleko poznatijeg uz pomoć takozvanog "dijagonalizirajućeg argumenta" o kojem će biti riječi kasnije.

Po istoričarima matematike, ovaj Kantorov članak umnogome je izmijenjen u odnosu na ono što je bio prvobitni naum što je prevashodno odraz Kronekerovog i Vajerštrasovog uticaja. Po svajetu saradnika autor izostavio dokaz neprebrojivosti iz svojeg članka koji je dodao tokom revizije [5]. Takođe, naslov članka se odnosi na realne algebarske brojeve koji su od perifernog značaja Kantoru bili, kako saznajemo iz njegove prepiske sa Dedekindom. Dokaz drugog tvrđenja je Dedekindov. . Međutim, zbog ideja koje su bile u samom članku spregnute tretman koji je pretrpio Kantor ostao je neizbježan. .

Iako po sadašnjem stanju stvari djeluje kao teško shvatljivo ali shvatanje da je skup realnih brojeva prebrojiv je mnjenje koje je među naučnicima Kantorovog doba preovladavalo usljed čega je njegov dokaz dočekan na nož.

Prva teorema koja je izložena u ovom radu iznosi tvrdnju da je skup algemarskih brojeva prebrojiv. Da bi se uspostavila ova bijekcija, koja je lažno predstavljena kao srž Kantorove zamisli. Definišemo kao *visinu* polinoma stepena n sa koeficijentima $a_0, a_1, \dots a_n$ veličinu: $n - 1 + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$raspoređuju se po njihovoj visini. Takođe, razmatramo samo nesvodljive polinome. Ovako pravimo jednu preglednu šemu i lako uspostavljamo željenu bijekciju između ovoga skupa i skupa prirodnih brojeva.

Druga teorema tvrdi: Za dati niz realnih brojeva $x_1, x_2, x_3, \ldots$ i razmakl $[a, b]$ postoji broj na ovo ovom razmaku koji nije sadržan u ovom nizu. Da bismo pojednostavili stvar, koristićemo otvoreni interval.

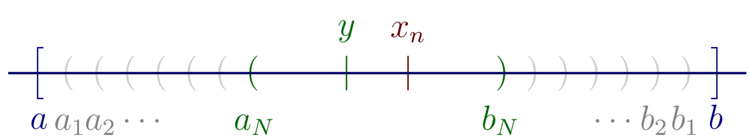
Broj sa $[a, b]$ koji nije sadržan u ovom nizu konstruišemodva niza realnih brojeva na sljedeći način: Nađimo prva dva broja datog niza koji su sadržanivu (a, b). Obilježimo manji od ova dva sa a_1 a veći sa b_1. Slično, pronalazimo prva dva broja ovoga niza koji su sadržani u (a_1, b_1) i manji označimo sa a_2 a veći sa b_2.. Nastavljajući ovu proceduru dobijamo niz uloženih intervala $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \ldots$ takvih da jedan interval sadrži sve one koji mu slijede. Ovo povlači da je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ rastući niz i da je $b_1, b_2, b_3, \ldots$ opadajući niz.

Broj intervala koji je generisan je ili konačan ili beskonačan. Ukoliko je konačan, neka je (a_N, b_N) taj interval. Ukoliko je beskonačan, neka su granične vrijednosti nizova koji predstavljaju krajeve intervala

$$a_\infty = \lim_{n \to \infty} a_n, \; b_\infty = \lim_{n \to \infty} b_n$$

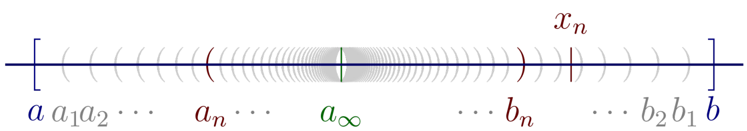
. Sad se naš dokaz razdvaja na tri slučaja:

Slučaj 1: Neka je (a_N, b_N). Kako najviše jedan x_n može biti u ovom intervalu, ma koji $y \in (a_N, b_N)$ (ukoliko on i postoji) nam odgovara.



Slika 1: Prvi slučaj

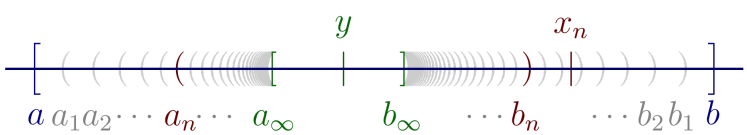
Slučaj 2: $a_\infty = b_\infty$. Onda, a_∞ ne pripada datom nizu je sa svako n imamo da a_∞ pripada intervalu (a_n, b_n), ali kako Kantor uočava, x_n nema to svojstvo. Ovo nam obezbjeđuje jedno jače svojstvo: Za svako n, (a_n, b_n) isključuje $x_1, \ldots, x_{2n}$ što se pokazuje indukcijom. Osnovni korak je: Ako $a_1 = x_j, b_1 = x_k$, i $E_1 = max(j, k)$, onda a_1, b_1 isključuje $x_1, \ldots, x_{E_1}$- Takođe, $E_1 \geq 2$ kako interval (a_1, b_1) isključuje svoje dvije granične tačke. Neka sad (a_n, b_n) isključuje $x_1, \ldots, x_{E_n}$ i $E_n \geq 2n$. Ako $a_{n+1} = x_j, b_{n+1} = x_k$ i $E_{n+1} 0 max(j, k)$ onda (a_{n+1}, b_{n+1}) isključuje $x_1, \ldots, x_{E_{n+1}}$. Takođe, $E_{n+1} \geq E_n + 2 \geq 2n + 2 = 2(n+1)$ pošto interval (a_{n+1}, b_{n+1}) isključuje iste brojeve kao i (a_n, b_n) uz kranje tačke a_{n+1} i b_{n+1}. Stoga, za sve tačke n: (a_n, b_n) isključuje tačke $x_1, \ldots x_n$.



Slika 2: Drugi slučaj

Slučaj 3: $a_\infty < b_\infty$. U ovom slučaju ma koje y iz $[a_\infty, b_\infty]$ nije sadržano u datom nizu jer za svako n y pripada u (a_n, b_n) ali x_n ne.

Ovim smo kompletirali naš dokaz. Iz postavke druge teoreme vidimo da ona jasno implicira da je elemenata sa ma kojeg segmenta $[a, b]$ više nego prebrojivo. Napomenimo još da je ovaj dokaz konstruktivan i da je stoga našao primjenu u programiranju koje generiše transcedentne brojeve. Ovaj program primjenjuje Kantorovu konstrukciju na niz koji sadrži sve algebarske brojeve na [0,1]. Štaviše, kako se ispostavlja broj koji nam postavljeni algoritam vrati jeste $\sqrt{2}-1$



Slika 3: Treći slučaj

2 Dijagonalizirajući argument

Prije svega, ovđe je riječ o dokazu nepreborjivosti skupa realnih brojeva. Pored toga, ljepota i elegancija ovoga dokaza su iznjedrila sami metod dijagonalizacije koji je našao odjeka u raznim poljima matematike. Dokaz je izložen u članku iz 1891. godine i razmatrao je skup T svih nizova binarnih cifara - tj. čiji su članovi 0 ili 1. Polazi se od konstruktivnog dokaza sljedeće teoreme.
Ako su $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ bilo koji niz elemenata skupa T, onda postoji uvijek element $s \in T$ koji ne odgovara nijednom s_n iz pomenutog niza.

Ilustrujmo što nam je naum na primjeru niza datog tipa:

$$\begin{gathered} s_1 = (\underline{\mathbf{0}}, 0, 0, 0, 0, \ldots) \\ s_2 = (1, \underline{\mathbf{1}}, 1, 1, 1, \ldots) \\ s_3 = (0, 1, \underline{\mathbf{0}}, 1, 0, \ldots) \\ s_4 = (1, 0, 1, \underline{\mathbf{0}}, 1, \ldots) \\ s_5 = (1, 1, 0, 1, \underline{\mathbf{0}}, \ldots) \\ \vdots \end{gathered}$$

I posmatraćemo niz $s = (\underline{\mathbf{1}}, \underline{\mathbf{0}}, \underline{\mathbf{1}}, \underline{\mathbf{1}}, \underline{\mathbf{1}}, \ldots)$.

Dakle, niz s dobijamo tako što postoječi niz nizova (s_n) smjestimo u beskonačnu matricu i potom elementa sa dijagonali redom smjestimo u niz i saberemo ih sa 1 po modulu 2. Na ovaj način dobijamo niz koji se ne može javiti u pomenutom nizu (s_n). Zbilja, ukoliko bi to bio slučaj onda bi postojalo neko $k \in N$ takvo da $s_k = s$. Samiim tim i $k-$ti član niza s_k jednak je $k - tom$ članu niza s. Međutim, k-ti član niza s upravo je dobijen tako što je k-ti član niza s_k sabran sa 1 po modulu 2 te je izvjesno $s(k) \neq s_k(k)$.

Iako je neprebrojivosti skupa realnih brojeva bila već potkrijepljena prvim Kantorovim dokazom o neprebrojivosti, koji je vezan za članak iz 1874. godine, pomennuti metod da jako lijepo da se iskoristi za dokaz neprebrojivosti skupa $\mathbf{R}$. Za ovo nam je potrebno da sklopimo nekakvu injekciju između skupa T binarnih nizova i skupa $\mathbf{R}$ realnih brojeva, i stoga će $\mathbf{R}$ biti neprebrojiv. Neka to nego ćemo, po Kantorovim upustvima, zapravo dobiti bijekciju koja nam obezbjeđuje da su T i $\mathbf{R}$ iste kardinalnosti $\mathfrak{c}$

Da bismo obezbijedili da možemo dijagonalizirajući argument u cilju da dokažemo da je kardinalnost skupa realnih broja veća od skupa prirodnih brojeva. Jednostavno je viđeti da je kardinalnost segmenta [0,1] upravo ista kao i kardinalnost skupa Realnih brojeva zbog bijekcije koja se uspostavlje uz pomoć linearnog preslikavanja $h(x) = \pi x - \frac{\pi}{2}$ i preslikavanja tan- Uvjeravamo se lako da je $g(x) = tan(h(x))$ bijekacija između [0,1] i $\mathbf{R}$. Dalje Kantor rezonuje tako što izbacuje sa segmenta izbaci racionalne brojeve kako bi obezbijedio injektivnost preslikavanja iz T u [0,1] koje svakom binarnom nizu jednostavno priduži odgovarajući binarni razvoj.

Napomenimo i da je argument dijagonalizacije zapravo metod koji poslije Kantora upotrijebio u velikom broju teorema. Među njima treba istaći prvu Gedelovu teoremu o nekompletnosti, kao i Čerčovo i Tjuringov odgovor na Hilbertov zadatak *Entscheidungsproblem*. Pored ovih, koji se računaju među prvim i najznamenitijim, ovaj metod svođenja na apsurd je našao široku primjenu.

3 Teorija transfinitnih brojeva

Ispitujući temeljno prirode beskonačnosti raznorodnih skupova, Kantoru se kao prirodna nametnula potreba da uspostavi izvjesnu hijerarhiju između beskonačnih skupova. Kantor se ovđe rješava na potpuno zdravorazumski zahtjev: za dva skupa A i B kažemo da su iste 'brojnosti' ukoliko postoji mogućnost da uspostavimo bijekciju između njih. Mada je sami uslov vrlo prihvatljiv - uspostaviti bijekciju između dva skupa zna vrlo često da bude problematično dok je ustanoviti na postoji bijekcija između dva skupa u opštem slučaju mnogo teže. Međutim, ukoliko možemo da uspostavimo injekciju $f : A \mapsto B$, možemo zaključiti da kardinalnost, kako ćemo nazivati ovo svojstvo 'brojnosti', skupa A ne premašuje kardinalnost skupa B. Ovo predstavlja zaključak koji ćemo intenzivno koristi.

Kako vidimo po njegovom članku iz 1895. koji se bavi zasnivanjem teorije transfinitnih brojeva, koncept snage odnosno moćnosti ili brojnosti skupa je ono što je njegova kardinalnost. Veličina ili brojnost konačnog skupa, kojim se pretežno i baratalo prije Kantora, jeste vrlo trivijalan zadatak. Tada se nalaženje ovoga broja, i nalaženje odgovarajuće funkcije, može shvatiti isto kao i ručno brojanja. Prirodno, prebrojavanje određenog skupa nam daje mogućnost da uspostavimo izvjesni poredak. Rukovodeći se ovom mišlju dobijamo da se uloga prirodnih brojeva koja se u svakodnevnom životu nameće može svesti na jedan od dva slučaja:

- Određenom mnoštvu pripisujemo količinu
- Članu toga mnoštva pripisujemo redni broj

Ovo što jeste trivijalno u slučaju konačnih skupova mnogo se usložnjava kad dolazimo do beskonačnih skupova. Navešćemo određene školske teoreme koje se manje ili više pripisuju Kantoru kako bismo stekli bolji uvid u pojam kardinalnosti skupova.

Tvrđenje 3.1. $\overline{X} < \overline{\mathcal{P}(X)}$

Dokaz. Pretpostavimo da postoji bijekcija $f : X \mapsto \mathcal{P}(X)$, što podrazumijeva da svakom elementu $x \in X$ odgovara neko $A_x \subseteq X$ kao i obrnuto. Posmatrajmo skup $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$. Iz bijektivnosti preslikavanja slijedi da postoji $a \in X$ takvo da $f(a) = A$.
Međutim: đe se nalazi naše a?

$\square$

Ukoliko on pripada A imali bismo slučaj $a \in f(a) = A$ - što ne može biti slučaj usljed definicije skupa A. Ukoliko on ne bi pripadao A imamo slučaj $a \notin f(a) = A$, što se ujedno i slaže sa definicijom skupa A. Shodno tome $a \in A$. Dobijeno protivrječje nam govori da nam je postavka pogrešna i shodno tome A.

Primjećujemo da se dokaz ove teoreme dosta liči svođenju na apsurd koji dobijemo u Raselovom paradoksu. Isto tako, metod dijagonalizacije počiva na sličnom apsurdu.

Navešćemo, ali bez dokaza i sljedeću školsku teoremu:,

Tvrđenje 3.2 (Kantor-Bernštajn-Šreder)**.** *Ukoliko za skupove A i B važi $\overline{A} \leq \overline{B}$ i $\overline{B} \leq \overline{A}$ onda važi $\overline{A} = \overline{B}$.*

Kantor je bez dokaza naveo ovu teoremu misleći vjerovatno na da je dovoljna antisimetričnost relacije $\leq$ da nam obezbijedi ovaj rezultat. Međutim, dokaz je vrlo suptilne prirode i podrazumijeva sklapanje bijekcije od injekckcija koje možemo da uspostavimo.

Sada, opskrbljeni ovim podacima koje slobodno možemo nazvati neformalnom definicijom vezanom za specijalni slučaj, imamo sve što nam je dovoljno da ogreznemo u malko rigoroznije definicije pojmova kardinala i ordinala.

3.1 Kardinali

Dakle, po izloženom vidimo da je kardinalnost skupa, odnosno njegov kardinalni broj, izvjesno svojstvo koje je zajedničko skupovima između kojih možemo da uspostavimo bijekciju. Ovo je naša intuitivna predstava koju u cjelosti hoćemo da ispoštujemo strogo matematički. Postavljajući ovako ovu neformalnu definiciju vidimo da je teško nju rgorozno postaviti, jer ustanovljavamo prirodu svojstva govoreći na koji je način ovo karakteristično za veći broj skupova. Zapravo, intuitivno mi tek naziremo šta znači kada dva skupa imaju istu kardinalnost.

Upravo na ovaj način slijedimo ukorak kako je Kantor razvijao ove koncepte, jer jednu kardinalnost spoznajemo uspomoć druge kardinalnosti. Štaviše, zapravo uvodimo relaciju ekvivalencije na klasi svih mogućih skupova. Dakle

$$A \equiv B \text{ akko } \exists f : A \mapsto B - \text{bijekcija}$$

U pomenutom članku iz 1895. koji se bavi zasnivanjem teorije transfinitnih brojeva. Imajući da su ovo kao neko amorfno svojstvo koje je zajedničko skupovima koji su izomorfni vidimo kako se ovo svojstvo ponaša u skladu sa operacijama operacijama na skupovima "$\cup$" i "$\times$" koje su u nekom analogne sa "$+$","$\cdot$". Zapravo, na skupu kardi

$$\overline{A \cup B} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$$

đe su $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ odgovarajući kardinalni brojevi ovih skupova. Slično ćemo usvojiti:

$$\overline{A \times B} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$$

Naša predstava o partitivnom skupu dopušta nam zapis ovoga tipa:

$$\mathcal{P}(A) = 2^{\mathfrak{a}}$$

U konačnom slučaju, izrečene tvrdnje sa najprirodnije uklapaju sa našom definicijom. Međutim, kad su u pitanju beskonačni skupovi cijeli sklop misli počinje da odudara od intuicije.

Što nam dopušta generišemo nove kardinalne brojeve znajući kardinalni broj jednog skupa.

Pomenimo još da je ovo ovo smisao zapisa:

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$$

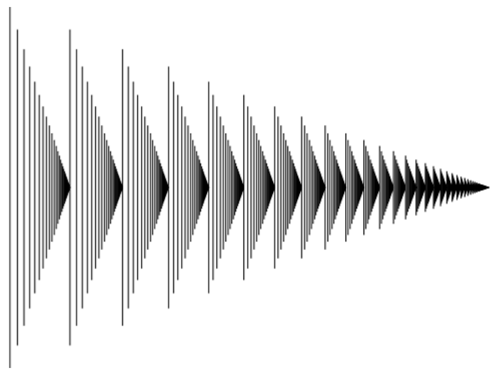
Đe je $\mathfrak{c}$ kardinalni broj skupa realnih brojeva.

3.2 Ordinali

Kao što smo prethodno naveli iz svojstava prirodnih brojeva koja se sama nameću imamo i 'redne brojeve'. Dakle, za svaki skup kojemu pripisujemo nekakav broj, koji se tiče načina na koji 'prebrojimo' rečeni skup do na permutaciju, uslovno govoreći. Ovo suptilno svojstvo kako naziremo zapravo vrlo vezano za uređenje skupa. Uviđamo - kod konačnih skupova ovo ne igra nikakvu ulogu, zapravo kardinal i ordinal se podudaraju na konačni skupovima. Dakle, dok nam kardinal daje informaciju o skupu kao mnoštvu ordinali koje možemo da mu pripišemo govore o uređenju koje možemo da uspostavimo na skupu.

Uzmimo za primjer naš stalni skup N i posmatrajmo kako to mi njega možemo izbrojat ukoliko imamo na raspolaganju beskonačno mnogo koraka. Možamo pravolinijski: počnemo od 1 i idemo u beskonačnost. Ovo nam generiše jedno uređenje i ordinalni broj koji ovome pripisujemo označavamo sa ω . Sa druge strane zašto ovako ne bismo postupali: počnemo od dvojke i izbrojimo sve do beskonalnosti i onda dodamo jedinicu na kraj. Naša postavka je da imamo dovoljno mnogo koraka koji odgovaraju kardinalnom broju. Isto tako, možemo i da počnemo od 3 pa da na kraj dodamo 1 i 2. Izloženim metodom dobijamo ordinale, a zapravo uređenja skupa prirodnih brojeva $\omega + 1$ i $\omega + 2$. Zbog čega ovi ordinali, odnosno ova uređenja odudaraju od standardnog? Iz prostog razloga što nam ona davaju da naš skup ima maksimalan element jer prebrojavanje završavamo sa 1 odnosno 2.

Primijetićemo da pri definisanju aritmetike ordinalnih brojeva imamo bitno labavije zahtjeve za ordinale. Stvarno, vidimo da komutativnost ne važi jer $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$



Slika 4: Grafički prikaz ordinala ω^2. Svaki od 'štapića'odgovara ordinalu oblike $\omega \cdot m + n$, đe m i n predstavljaju prirodne brojeve

Po teoriji skupova kojoj danas baratamo imamo podatak da svaki skup možemo dobro da uredimo. Štaviše, klasu (ne skup!) ordinala možemo urediti shodno aritmetici koju na njima definišemo. Prvobitni koncept, koji je krećući od zdravorazumskih navoda došao do manje-više protivintuitivnih zaključaka ra. Shodno operacijama koje se definišu na njima, na klasi ordinala, koja je superinduktivna, definišu se i operacije sljedbenika i kao posebni pojam navodi se granični ordina koji je onaj koji nema prethodnika. Operacija sljedbenika 'djeluje' upravo onako kako smo opisali da ke $\omega + 1$

Da ne bismo nepotrebno pošli u širinu ili usljed površnosti samo sklopili kako tako neku definiciju rekapitulirajmo šta ova dva naša pojma predstavljaju: svakom skupu možemo pripisati najviše jedan kardinalni broj, dok možemo veliki broj ordinalnih brojeva da pripišemo. Kardinal je ono što je zajedničko preslikavanjima koje nam omogućava da opišemo ovu klasu dok je ordinal zapravo vrsta izlistavanja svih članova, koja nam potom diriguje uređenje skupa, znajući prethodno kardinal.

4 Kantorov skup

Iako je Kantorova zamisao bila opštija a ovaj tradicionalno najčešći vid Kantorovog skupa putem ternarnih zapisa realnih brojva sa segmenta [0,1], mi ćemo se ipak na njega ograničiti. I ovaj jednostavniji prikaz biće nam dovoljan da uočimo duboka svojstva ovog neobičnog skupa.

Definicija 4.1. Kantorov skup $\mathcal{C}$ jeste skup kojeg čine brojevi sa segmenta [0,1] koji ne sadrže jedinice u ternarnom zapisu.

Primjedba. *Da ne bi došlo kod pometnje: mi ovđe pod ternarnim zapisom nekog broja isključivo razmatramo one koji beskrajno mnogo nenultih cifara. Na taj način postižemo jednoznačnost i obezbjeđujemo da je* $\frac{1}{3} = 0,022\ldots$ *umjesto*

0,1.

Slika 5: Kantorov skup u prvih sedam iteracija

Šta ova definicija znači u smislu konstrukcije ovog skupa? Zapravo, znači da se ona vrši rekurzivno:
Polazimo od segmenta [0,1] i iz njega otklonimo interval koji čini središnju trećinu. Preostale segmente podvrgnemo istom tretmanu. U prvom koraku izbacujemo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ koji ćemo označiti sa Δ_{11}. Označimo sa F_1 skup koji je nastao poslije prvog koraka:

$$F_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1] = [0,1] \setminus (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})$$

odnosno dobijamo skup F_1 zapisujemo kao:

$$F_1 = [0,1] \setminus \Delta_{11}.$$

Isti postupak sprovodimo nad preostalim manjim intervalima te dobijamo preostalim segmentima pa da je:

$$F_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

odnosno,

$$F_2 = F_1 \ \ ((\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}))$$

Za novodobijene intervale ćemo uvesti oznake Δ_{21} i Δ_{22} Te se ovo sve može elegantnije zapisati kao

$$F_2 = F_1 \setminus (\Delta_{21} \cup \Delta_{22})$$

Primjenjujući izloženi postupak dovoljan broj puta uočavamo zakonitost:

$$F_n = F_{n-1} \setminus \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \Delta_{nk}$$

đe je

$$\Delta_{nk} = (\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n})$$

Ovim postupkom konstruišemo Kantorov skup. Preciznije:

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \Delta_{nk}$$

Pošto smo izložili samu prirodu ovoga skupa, osvrnimo se i na pojedina njegova svojstva koja ćemo mjestimično potkrijepiti dokazima a poneđe usvojiti slikovitim primjerom. Kantorov skup je karakterističan po tome što je: neprebrojivost, perfektan i Lebegove mjere 0.

Primjedba. *$\mathcal{C}$ je kardinalnosti $\mathfrak{c}$*

Dokaz. Posmatrajmo preslikavanje $f : \mathcal{C} \to \mathcal{P}(N)$ koje definišemo formulom

Funkcija f svakom elementu $x = (0.n_1 n_2 \dots n_k ...)$, đe su n_i 0 ili 2, iz Kantorovog skupa dodjeljuje se podskup skupa prirodnih brojeva po sljedećem pravilu:

$$f(0.n_1 n_2 n_3 \dots n_k) = \{i_1, i_2, i_3 \dots\}$$

đe su ovo indeksi elemenata koji su različiti od 0.

Pokazaćemo da je slika ovoga preslikavanja naprebrojiv skup. Očito, slika ovog preslikavanja je podskup od $\mathcal{P}(N) \setminus K$ đe je $a \in K$ akko je a konačni podskup od N. Naš je zadatak da pokažemo da je kadinalnost od K zapravo $\aleph_0$. Međutim, ovo nam sigurno važi jer za bilo koje $k \in N$ podskupova sa k elemenata ima prebrojivo, a znamo da je prebrojiva unija prebroijivih skupova prebrojiv skup. Dakle, kardinalnost od $\mathcal{C}$ je $\mathfrak{c}$. □

Primjedba. *Kantorov skup je neprazan i zatvoren*

Dokaz. Primijetimo da $0 \in F_n$ za svako $n \in N$, pa slijedi da $0 \in \mathcal{C}$ i da je skup $\mathcal{C}$ neprazan.

Uočimo da je za svako $n \in N$ i svako $k \in 1, 2, ..., 2^{n-1}$ skup Δ_{nk} otvoren, slijedi da je $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \Delta_{nk}$ otvoren kao beskonačna unija otvorenih skupova i kako skup $\mathcal{C}$ možemo zapisati $\mathcal{C} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \Delta_{nk}$ to slijedi da je skup Kantorov skup $\mathcal{C}$ zatvoren kao komplement otvorenog skupa u odnosu na skup

$[0, 1]$.

Možemo ovo svojstvo pokazati i na sljedeći način.

Svaki od skupova F_n je zatvoren kao unija Konačnog broja zatvorenih intervala, pa je i njihov presjek zatvoren skup. Slijedi, Kantorov skup $\mathcal{C}$ je zatvoren. $\square$

Primjedba. *Kantorov skup nema izolovanih tačaka*

Dokaz. Neka je $x \in \mathcal{C}$ tačka Kantorovog skupa i neka je $\epsilon > 0$. Neka je $I = (x - \epsilon, x + \epsilon)$ ϵ-okolina tačke x. Neka prirodan broj n zadovoljava nejednakost $3^{-n} < \epsilon$, tada postoji tačno jedan interval $[a_n, b_n]$ koji je nastao u n-tom koraku i čija je dužina 3^{-n} i sadrži tačku x. Pri tome je $[a_n, b_n] \subset I$. Kako interval $[a_n, b_n]$ sadrži kontinuum mnogo tačaka (jer je iste kardinalnosti kao i početni Kantorov skup), to onda i ϵ-okolina tačke x sadrži kontinuum mnogo tačaka a to povlači da tačka x nije izolovana. Slijedi da F nema izolovanih tačaka. $\square$

Primjedba. *Kantorov skup je niđe gust*

Dokaz. Neka je $I \subset [0, 1]$ interval i $x \in \mathcal{C} \cap I$. Tada postoji odsječak $[a_n, b_n]$ tako da $x \in [a_n, b_n] \subset I$. Sada posmatrajmo interval $\Delta_{nk} \subset I$, ovaj interval ne sadrži nijednu tačku Kantorovog skup $\mathcal{C}$. Dakle, skup $\mathcal{C}$ je niđe gust.

Zaključujemo, *Kantorov skup je savršen i niđe gust skup.*

$\square$

Primjedba. *Kantorov skup je Lebegove mjere 0*

Dokaz. Pokažimo da je skup $\mathcal{C}$ Lebegove mjere 0.

$$
\begin{aligned}
m(\mathcal{C}) &= m(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) \\
&= m([0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \Delta_{nk}) \\
&= m([0,1]) - m(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \Delta_{nk}) \\
&= m([0,1]) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k-1}^{2^{n-1}} m(\Delta_{nk}) \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k-1}^{2^{n-1}} 3^{-n} \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot 3^{-n} \\
&= 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} \\
&= 1 - 3^{-1} \cdot 3 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

Na kraju, da bismo kompletirali navođenje svih neobičnih svojstava ovoga skupa, recimo još da $\mathcal{C}$ predstavlja prvi otkriveni fraktalni skup. To, opušteno govoreći, da pri uveličavanju ovoga skupa dobijamo isti skup.

5 Hipoteza kontinuuma

Govoreći grubo, u ovoj hipotezi iznešeno koje su to moguće veličine beskonačnih skupova. Ona tvrdi:

Ne postoji skup čija je kardinalnost striktno između skupa cijelih brojeva i skupa realnih brojeva.

Formalnije napisano:

Tvrđenje 5.1. $\nexists \mathbb{A} : \aleph_0 < |\mathbb{A}| < 2^{\aleph_0}$

Kantor, vjerujući u istinitost ovog tvrđenja pokušavao više godina da ga bezuspješno dokaže. Međutim, iako sama ova hipoteza nije dokazana nije ni opovrgnuta. Štaviše, američki matematičar Koenn je nadovezujući se na Gedelov rad dokazao da je nezavisnost ove hipoteze od ZFC teorije skupova - teorije skupova koju je njegov rad iznjedrio. Gedel je ustanovio još 1940. godine da je nemoguće opovrgnuti pomanutu hipotezu sa stanovišta ZFC, dok je Koen upotpunio ovo tvrđenje dokazom uz metod forsinga da ju je nemoguće dokazati.

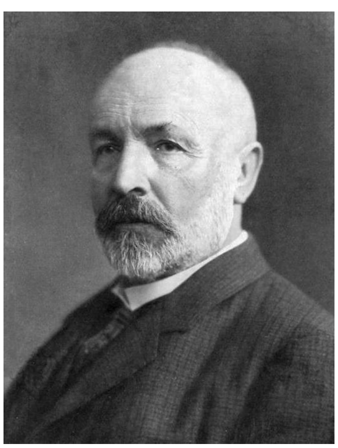
Kako dokaz nezavisnosti hipoteze beskonačnosti od ZFC teorije skupova višestruko nadmašuje potrebe i domete ovog seminarskog rada kao i znanje samog autora ovđe ćemo se zadovoljiti sljedećom opaskom:

Dakle, ova hipoteza nam obezbjeđuje sve moguće beskonačne skupove razvrstavamo po klasama ekvivalencije na taj način što ćemo dobiti izvjesnu diskretnu strukturu. Ova osnovna postavka za sobom bi povukla i to da ne može postojati kardinalni broje između kardinalnosti nekog beskonačnog beskonačnog skupa i kardinalnosti njegovog partitivnog skupa. Zapravo, skup transfinitnih brojeva predstavlja, u nekom smislu, diskretan skup.

U Kantorovu čast, David Hilbert je hipotezu kontinuum na konferenciji Međunarodnog kongresa matematičara predstavio prvim problemom u nizu od 23 tada neriješena problema koje je smatrao ključnim za matematiku dvadesetog vijeka.

Život, lik i djelo

Opšti pregled



Kao što smo naveli u početku ovoga rada, poseban osvrt zaslužuje kantorova ličnost, psihologija, vjerovanja i život kako bi se na pravi način spoznala dubina njegove misli. Ovo je stoga što ovđe nije u pitanju nije samo matematički genije koji je svojim intelektom daleko nadmašio svoju okoline već i jedna svestrana ličnosti koja se nije isticala samo po snazi koliko po prirodi svojih ideja. Njegovo naučno djelo plod je kreativnog i duhovnog procesa koji je proživljavao cijelim bićem zbog čega je ovog neophodno sagledat kao cjelovitu ličnost.

Po pravilu istoričati matematike u opštem slučaju više polažu na idejama koje su pronešene nego li samim ličnostima koje ih sklapaju. Posljedično, život matematičara i njegovo naučno djelo razmatraju se kao potpuno odvojene cjeline. Njegov životopis je moguće od izvjesno ljudskog značaja, ali njegova naučna djelatnost je uzeta kao srž njegovog djela. Međutim, analiza ličnosti kreativnog pojedinca može da otkrije narav njegovog velikog otkrića. Mi se držimo toga da je u Kantorovom slučaju ovo osobito tačno. Iako je mnogo podataka o Kantorovom životu nažalost propalo, spriječeni smo da ponudimo puniju životopis ali po onome što je opstalo pokušaćemo da sklopimo kakav-takav pregled

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor rođen je zapadnoj trgovačkoj koloniji u Sankt Peterburgu, u Rusiji 3. marta 1845 godine, u kojem je živio sve do svoje jedanaeste godine. Što se tiše porijekla porodice Kantor, uzima se da vode korijene iz Danske. Jasno je da je Kantorov đed živio u Kopenhagenu ali za njegovog oca, Georga Voldemara Kantora, ne zna se zasigurno kada se nastanio u Rusiju i daljem društvenom položaju cijele porodice. U svakom slučaju, imamo podatak da je Georg Voldemar sticao obrazovanje koje predstavlja zametak duhovnosti koja je Kantora, kao formiranu ličnost, držala na okupu u njegovim najcrnjim životnim trenucima. Kantorova majka, Marija Ana Bem, rođena je u Petrogradu i krštena je kao katolkinja. Njena porodica bila je vaskoliko muzički nadarena. Štaviše, brat Kantorovog đeda Jozev Bem bio je upravnik Bečkog konzervaorijuma i tvorac jedne od najvećih škola za violiniste koja je iznjedrila brojne virtuoze onoga doba. Štaviše, Georg kao najstariji od šestoro đece jeste i sam bio muzički vrlo nadaren. Georg Voldemar je shodno vlastitim luteranskim uvjerenjima vaspitavao svoju đecu. Svestranost Kantora, koji je predstavljao čovjeka koji veliko interesovanje pokazivao za brojne naučne, filozofske i umjetničke discipline pripisujemo kućnom vaspitanju koje je bilo tako naklonjeno.

Po sačuvanoj prepisci između oca i sine Pored toga, smatra se da je očev uticaj presudno uticao na Kantorov profesionalni angažman. Po onome što je poznato, Georg Voldemar ne samo da je bio neka vrsta uzora mladom Kantoru već i velike potpore u kasnijem životu. Iako je svojim autoritetom na sina prenio uvjerenja na kojima je počivao njegovo duhovno biće, podržavao je sina pri izboru struke sa kojom se nije naročito slagao.

Godine 1856. usljed bolesti Georga Voldemara, cijela porodica se seli prvo u Vizbaden a nakon toga u Frankfurt , tražeći blažu klimu za glavu porodice načetog zdravlja. Školovanje u realnoj gimnaziji u Darmštatu Kantor navršava 1860. godine sa najvišim odlikama posebno u oblasti matematike. Njegovo obrazovanje nastavlja se na Švajcarskoj federalno politehnici 1862. poslije čega ubrzo umire njegov otac. Prilikom upisa na ovu škosku ustanovu, otac šalje sinu vrlo dirljivo pismo koje u svojoj obimnosti izlaže lijepo srž vjere koja je naslijeđena sa koljena na koljeno. Nedugo nakon ovog neočekivanog događaja, Kantor se prebacuje svoje studije na Univerzitet u Berlinu slušajući predavanja tada vodećih matematičara Leopolda Kronekera, Karla Vajerštrasa i Ernsta Kumera. Jedan semestar je proveo na Univerzitetu u Getingenu, tadašnji ali i kasniji centar matematičkog istraživanja. Kao dobar student, Kantor je stekao svoj doktorat 1867. godine. Nedugo poslije angažmana u jednoj berlinskoj gimnaziji, biva ponuđen mjesto na Univerzitetu u Haleu đe je kasnije proveo svoju cijelu karijeru.

Kantor se ženi 1874. godine za Valiju Gutman, sa kojom će imati šestoro đece. Stečeno bogatsvo sa očeve strane omogućavalo mu je da održava porodicu usljed skromne profesorske plate. U slično vrijeme stiče važno prijateljstvo sa Rikardom Dedekindom sa kojim vodi brojne rasprave koje su bitno uticale na njegov naučni rad. Ubrzo biva i prozvan u zvanje vanrednog te i redovnog profesora - sa svega 34 godine što je u to vrijeme predstavljalo osobitu počast. Ipak, Kantor je u Haleu bio daleko od aktuelnih matematematičkih zbivanja ubog čega je htio nastavi svoj angažman na Univerzitetu u Berlinu na kojemu je proveo i studijeske dane. U ovom pokušaju je osujećen i kao glavni krivac uzima se Leopold Kroneker, njegov nekadašnji profesor koji danas slovi kao jedan od osnivača konstruktivizma. Kroneker je nastojao svom silom da pokopa ugled koji je počeo da gradi u naučnoj javnosti. Namjerno je odugovlačio sa objavljivanjem njegovih članaka u brojnim časopisima u kojima je bio urednik, okaraksterisao ga kao da "kvari omladinu" te da je "naučni šarlatan". Kad kod se prijavio na konkurs sa novog profesora u Berlinu, bivao je uvijek odbijen čemu je glavni razlog bio upravo Kroneker. Ovakav stav koi je zauzeo je Kantoru zatvorilo brojna vrata i učinilo je nemogućim da ikad napusti Hale.

Duševno zdravlje

Prvi ozbiljni nervni slom dogodio se Kantoru nedugo poslije trideset devetog rođendana, u proljeće 1884. Ova epizoda njegovog života uvijek je igrala veliku ulogu u senzacionalnim prikazima njegovog život, od kojih nijedan nije tako nemaran i nepouzdan kao onaj od E. T. Bela. Nezadovoljan mnjenjem koje je iznio 1927. Šuflajz da je glavni razlog Kantorovog sloma sukob sa Kroneker, Bel se riješio da uzme kao sredstvo popularnu psihologiju i sklopi predvidljivu i neoriginalnu frojdovsku analizu. Našavši bez pokrića korijen Kantorov unutrašnjeg u njegovom đetinjsvu svalio je svu krivicu na njegovog oca. S druge strane, stvari detalji koji se tiču Kantorove bolesti, kako je danas shvaćeno njegovo stanje, su daleko zanimljivije nego analiza koja je na brzu ruku sklopio Bel i nudi daleko bolji uvid u njegovu ličnost.

Prvi nervi slom je Kantora zadesio u Parizu kad je sastančio sa jednim brojem vrsnih francuskih matematičara među kojima su bili: Ermit, Pikar i Apel te je blaženo izvijestio Mitag-Leflera da je iz novostečenog poznanstva sa Poenkarem te da je bio srećan što ovaj razumije lijepo koncept transfinitnih brojeva i njegove primjene na funkcionalnu analizu. Tokom boravka, grupa francuskih matematičara napustila je Pariz, što je ostavilo Kantoru riješene ruke da utoli svoju potrebu za muzikom i pozorištem. Nedugo zatim, od njega je hitno zahtijevano da se vrati kući zbog neočekivanih porodičnih okolnosti nakon čega ga je zadesio slom. Iako nemamo sve potrebne podatke da tvrdimo šta je uzrok, poprilično osnovano i vrlo uvreženo mišljenje da u ovome veliku zaslugu ubire Kroneker. Ovaj za svoje vrijeme izrazito uticajni matematičar glavni je i postojani neprijatelj cjelokupnom Kantorovom radu. Nije se ustezao i od ličnih kvalifikacija nazivajući ga šarlatanom i neznalicom. Od osobitog značaja je pritisak koji je vršio na mlađeg kolegu da dokaže svoju 'kontinuum hipotezu' koja navodno treba da prestavlja centralni dio njegovog rada. Kao što smo viđeli, postavka ovog zadatka daleko nadmašuje vrijeme u koje je živio Kantor i ne može se dokazati ili opovrgnuti sa stanovišta teorije skupova koja se po njegovom radu zasnovala. Razložno je misliti da je upravo ovaj osećaj nesposobnosti da dokaže ono u šta je toliko pomno vjerovao i osujećenost u profesionalnom pogledu upravo ono što ga je dovela do ovakvog sloma. Čak i po šturim informacijama koje imamo o Kantorovom životu, znamo da je ovo njegovo stanje zapravo manična depresija. Uzroci mogu biti razni, i ne isključujemo da su donekle bili vezani za njegovu duhovnu djelatnost i vjerovanja ali zasigurno tvrdimo da su krize u koje je godina sve češće zapadao posljedica profesionalne osujećenosti i neprijateljstkog stava glavnine tadašnjeg matematičkog svijeta. Ovi periodi sloma i novom ushićenja, koje je uvijek navraćalo zbog načina doživljavanja vlastitih ideja umnogome su određivali njegovu naučnu djelatnost koja je mjestimično presahla kako bi bujicom nastavila.

Kao rezultat ovog stanja, Kantor se odlučuje da batali matematiku jedno vrijeme i umjesto toga da predaje filozofiju umjesto matematike na njegovom matičnom univerzitet u Haleu. Ovaj nagli preobražaj namjerno je napravio kako bi spriječio mogući ponovni nastup njegove bolesti - vjerujući da bi manje bavljenje matematikom učinilo ključnu stvar. Jedno vrijeme, ova strategija se pokazala uspješnom sve do 1899. godine kada doživljava ponovni slom. Kantor je opet suočen sa brojnim kako ličnim tako i profesionalnim dilemama. Baveći se pri svojem radu opet teorijom skupova, kako saznajemo iz njegove prepiske sa Dedekindom, vraća se na teren hipoteze kontinuum koja mu izmiče. O dubini tuge u koju je zapao govori i pismo Ministarstvu kulture u kojem je iznio zahtjev da u potpunosti napusti profesorski poziv. Dok god njegova ipak skromna plata ne bi bila umanjena bio bi zadovoljan poslom bibliotekara. Nikakvo istaknuto zvanje nije neophodno, samo mu treba nešto da se trsi njemačkog univerziteta. Nastojao je da liši ministarstvo svake sumnje u saradnju po ovom pitanju. Naglašavao je svoje kvalifikacije - u smislu poznavanja istorije i knjiženovi pto je temeljio na njegovim radovima na temu Bejkon-Šekspirovskog pitanja. Čak je išao dotle da reče da je njegovo istraživanje koje se ticalo prvog engleskog kralja ne bi omanulo da zaprepasti tadašnju englesku vladu! Htio je da ovome doda notu hitnosti pod prijetnjom da bi se on obratio ruskim diplomatskim krugovima koji bi, budući da je rođen u tamo, bili njemu naklonjeni toliko da ga prime u službu cara Nikolaja II.

Po svemu sudeći ništa od ovoga nije urodilo plodom. Njegovom novi slom ostavio ga ništa uspješnijim nego onaj prvi. Ostao je na predaje u Haleu kao redovni profesor. Dobar dio 1899 bio je hospitalizovan ali prije nego što se ova godina dovršila čitavu porodicu Kantora zadesila je velika nesreća. Pored toga što su mu u kratkom vremenskom razdoblju preminuli majka i brat, konačni udarac je porodici Kantora zadat iznenadnom smrću sina koja je nastupila tokom posebnom predavanja na temu Bekon-Šekspirovskog pitanja. Iako je đetić bio slabašan u najranijim danima, vremenom je jačao. Njegov duh, kako je Feliksu Klajnu pisao, jačao je shodno njegovom tijelu. Rudolf, njegov sin, bio je vrlo ralentovan za muziku koju je njgov otac napustio ne bi li se bavio matematikom. Nikad nije dovoljno zažalio što je napustio svijet muzike i bio je utješen nadom da neće gubiti kontakt sa tim umjetničkim svijetom uz pomoć sina koja je naprasno zgasla.

Održavajući jedno vrijeme izvjesnu ravnotežu, novi slom ga je zadesio 1902. godine usljed čega provodi u bolnici za duševno bolesne zbog čega je oslobođen svojih profesorskih dužnosti bio za zimu 1902.-1903. Manje od godinu dana od ovog boravka biva opet hospitalizovan nakon čega biva učestalo priman i otpuštan iz lokalne duševne bolnice grada Hale.

Još jedan veliki udarac Kantor je pretrpio na Trećem međunarodnom kongresu matematičara u Hajdelvergu kada je Julius Kenig svojim naučnim radovima doveo u pitanje samo polazište teorije transfinitnih brojeva. Da bi stvar bila gora, Kantor je javno obrukan i to pošto je na ovaj događa sa dvijema svojim šćerima. Nakon ovoga Kantor je unezvjeren provodio dane tražeći grešku u Kenigovom radu , koji se potom ispostavio netačnim. Ne iznenađuje da je ovoliko uzbuđenje bilo previše za Kantora već dobro načetog mentalnog zdravlja usljed čega je u tri navrata poduže vremena provodio u duševnoj bolnici u Haleu, nakon čega je prebačen u novo lječilište. Zadnji put je prijavljen u kliniku u Haleu 11. maja 1917 godine. Nije mu se odlazilo tokom smještaja konstantno piše porodici da ga vrate kući. Nije mu dozvoljeno da se vrati kući. Jedno od zadnjih sačuvanih pisama koja je uputio svojoj ženi govore o dubini depresije koju je zapao ali prilikom koje nije izgubio neku umjetničku nit. Kantor je do sljedeće zime čamio u svojem intimnom zatvoru do šestog januara 1918. godine, naizgled zbog otkaza rada srca. Edmund Landau je pisao Kantorovoj ženi, Valiji Gutman, neposredno poslije njegove smrti da je ono što je Kantor predstavljao nikada neće umrijeti. Čovjek mora biti zahvala, on je zapazio, što je čovječanstvu dat Georg Kantor iz čijeg će rada potonje generacije učiti. Ovo je zaključio rekavši : "Nikada niko neće ostati više živ."

Literatura:

[1] Georg Cantor - Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers

[2] Georg Cantor - Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reallen algebraischen Zahlen

[3] Joseph Warren Dauben - Georg Cantor

[4] Raymond M. Smullyan, Melvin Fitting - Set Theory and the Continuum Problem

[5] Dušan Boljanić - Fraktali i Kantorov skup